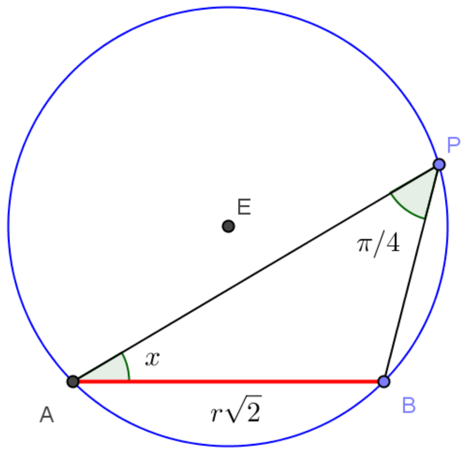
PNI 2008 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda AB uguale al lato del quadrato in esso inscritto.



Il lato AB del quadrato inscritto misura $r\sqrt{2}$; inoltre l'angolo APB vale $\frac{\pi}{4}$.

1)

Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto:

$$\frac{PA^2 + PB^2}{AB^2}$$

e lo si esprima in funzione di $X = tgP\hat{A}B$.

L'angolo $P\hat{A}B = x$ ha le seguenti limitazioni: $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$.

Risulta (per il teorema della corda):

$PA = 2r \cdot sen\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$, $PB = 2r \cdot senx$, quindi:

$$\frac{PA^2 + PB^2}{AB^2} = \frac{4r^2 \cdot sen^2\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + 4r^2 \cdot sen^2x}{2r^2} = 2sen^2\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + 2sen^2x =$$

$$= 2\left(sen\frac{3}{4}\pi\, cosx - senx\, cos\frac{3}{4}\pi\right)^2 + 2sen^2x = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cosx + \frac{\sqrt{2}}{2}senx\right)^2 + 2sen^2x =$$

$$= (cosx + senx)^2 + 2sen^2x = \cos^2 x + 2senxcosx + 3sen^2x = \frac{PA^2 + PB^2}{AB^2}$$

Esprimiamo il rapporto in funzione di $X = tgP\hat{A}B = tgx$.

Notiamo che la funzione può essere riscritta nella seguente forma:

$$f(x) = \cos^2 x + 2senxcosx + 3sen^2x = \frac{1 + cos2x}{2} + sen2x + 3\frac{1 - cos2x}{2} =$$
$$= sen2x - cos2x + 2 = \frac{2tgx}{1 + tg^2x} - \frac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x} + 2 = \frac{3tg^2x + 2tgx + 1}{1 + tg^2x}$$

Quindi, ponendo $X = tgP\hat{A}B = tgx$ si ha:

$$f(X) = \frac{3X^2 + 2X + 1}{1 + X^2}$$

2)

Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

$$y = f(X) = \frac{3X^2 + 2X + 1}{1 + X^2}$$

Dominio: $-\infty < X < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Essendo $f(-X) = \frac{3X^2 - 2X + 1}{1 + X^2}$ diverso sia da $f(X)$ che da $-f(X)$ la funzione non né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $X = 0$, $y = 1$.
Se $y = 0$, $3X^2 + 2X + 1 = 0$, $\Delta < 0$, *nessuna soluzione*

Segno della funzione:

$$y > 0 \quad se \quad -t^2 + 2t + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2t - 1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2}$$

Limiti:

$$\lim_{X \to \pm\infty} \frac{3X^2 + 2X + 1}{1 + X^2} = 3 \ : \quad y = 3 \ \ asintoto\ orizzontale$$

Non ci sono asintoti verticali né obliqui.

Eventuali intersezioni con l'asintoto orizzontale:

$\frac{3X^2+2X+1}{1+X^2} = 3$, $3X^2 + 2X + 1 = 3 + 3X^2$, $X = 1$, : C=(1;3)

Derivata prima:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{3X^2+2X+1}{1+X^2}\right) = \frac{-2X^2+4X+2}{(X^2+1)^2}$$

$f'(X) \geq 0$ se $-2X^2 + 4X + 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad X^2 - 2X - 2 \leq 0 \, : \, 1 - \sqrt{2} \leq X \leq 1 + \sqrt{2}$

Pertanto la funzione è crescente se $1 - \sqrt{2} \leq X \leq 1 + \sqrt{2}$ e decrescente se

$X < 1 - \sqrt{2}$ oppure $X > 1 + \sqrt{2}$

$X = 1 - \sqrt{2}$ punto di minimo relativo (e assoluto), $f(1 - \sqrt{2}) \cong 0.59$
$X = 1 + \sqrt{2}$ punto di massimo relativo (e assoluto), $f(1 + \sqrt{2}) \cong 3.41$

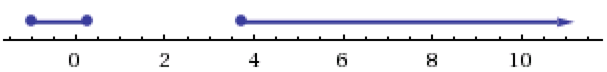
Derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{3X^2+2X+1}{1+X^2}\right) = \frac{4(X^3-3X^2-3X+1)}{(X^2+1)^3}$$

$f''(X) \geq 0$ se $X^3 - 3X^2 - 3X + 1 \geq 0$, $(X+1)(X^2-4X+1) \geq 0$,

$-1 \leq X \leq 2 - \sqrt{3}$
$X \geq 2 + \sqrt{3}$

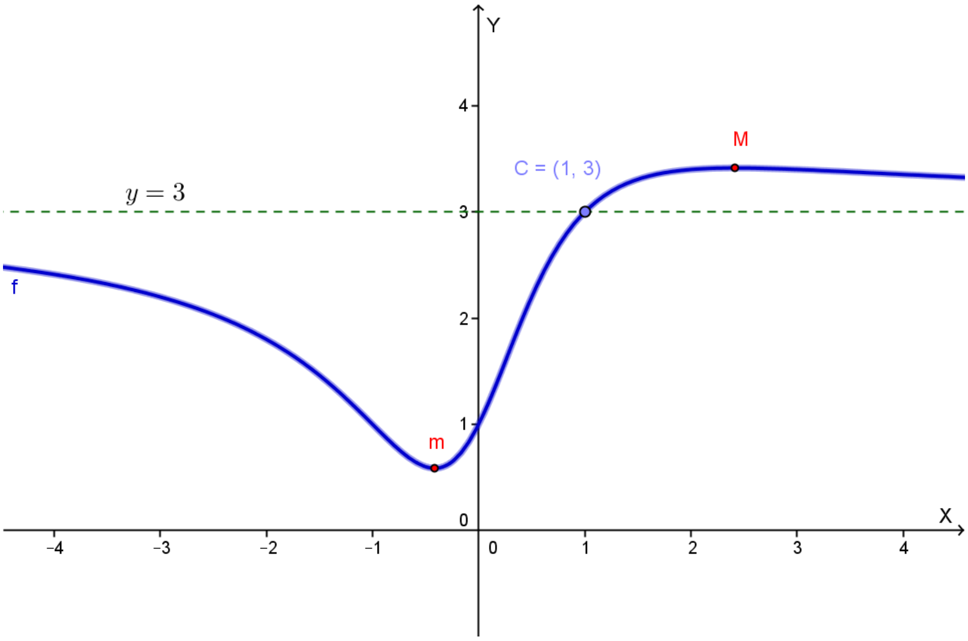
Il grafico della funzione volge quindi la concavità verso l'alto nei seguenti intervalli:



Abbiamo tre punti di flesso:

$X = -1$, $f(-1) = 1$
$X = 2 - \sqrt{3}$, $f(2 - \sqrt{3}) \cong 1.66$
$X = 2 + \sqrt{3}$, $f(2 + \sqrt{3}) \cong 3.37$

Il grafico della funzione è il seguente:



Osservazione

Analizziamo la funzione di equazione:

$y = f(x) = \cos^2 x + 2senxcosx + 3sen^2x$

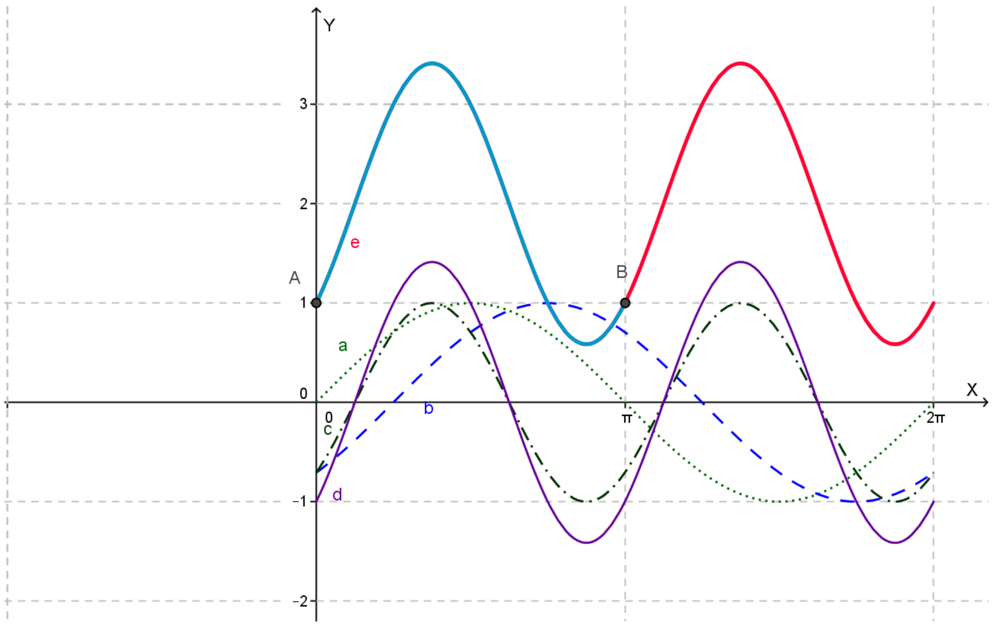
Notiamo che può essere riscritta nella seguente forma:

$$f(x) = \cos^2 x + 2senxcosx + 3sen^2x = \frac{1 + cos2x}{2} + sen2x + 3\frac{1 - cos2x}{2} =$$
$$= sen2x - cos2x + 2 = \sqrt{2} \cdot sex\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$$

Quindi:
$f(x) = \sqrt{2} \cdot sex\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \qquad (periodo\ T = \pi)$

Il grafico di questa funzione si deduce dal grafico della funzione seno mediante le seguenti operazioni:

a) $y = senx$
b) $y = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$: traslazione di vettore $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$
c) $y = sen\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$: contrazione orizzontale di fattore 2
d) $y = \sqrt{2}\, sen\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$: dilatazione verticale di fattore $\sqrt{2}$
e) $y = \sqrt{2}\, sen\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$: traslazione di vettore $(0; 2)$

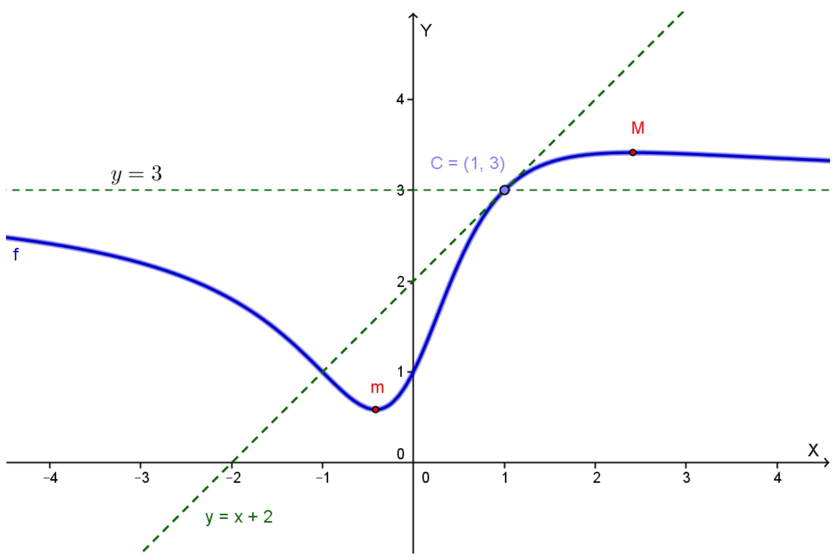


3)

Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.

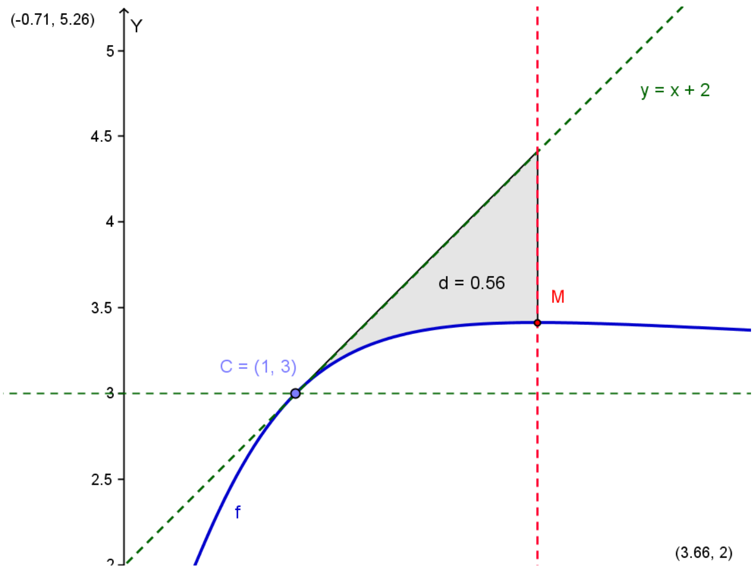
C=(1;3); $f'(1) = 1$. La tangente in C ha equazione:

$y - 3 = f'(1)(x - 1)$, $y = x + 2$



4)

Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione $x = k$, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale.

$$Area = \int_1^{1+\sqrt{2}} f(X)dX = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(X + 2 - \frac{3X^2 + 2X + 1}{1 + X^2} \right) dX =$$

$$= \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(X + 2 - \frac{3X^2 + 3 + 2X - 2}{1 + X^2} \right) dX = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(X + 2 - \frac{3(X^2 + 1) + 2X - 2}{1 + X^2} \right) dX =$$

$$= \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(X + 2 - 3 - \frac{2X}{1 + X^2} + \frac{2}{1 + X^2} \right) dX = \left[\frac{1}{2}(X-1)^2 - ln(1 + X^2) + 2arctg(X) \right]_1^{1+\sqrt{2}} =$$

$$= 1 - \ln\left(4 + 2\sqrt{2}\right) + 2arctg\left(1 + \sqrt{2}\right) - (-ln2 + 2arctg(1)) =$$

$$= 1 - \ln 2 - \ln\left(2 + \sqrt{2}\right) + 2 \cdot \frac{3\pi}{8} + ln2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 - ln\left(2 + \sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{4} \cong 0.557 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri