PNI 2008 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$y = a\, sen^2x + b\, senx + c$$

1)

Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per A(0,2), per B(π/6,0) ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$.

Il coefficiente angolare della retta è: $m = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f'(x) = 2a\, senx\, cosx + b\, cosx, \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2a\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad da\ cui:$

$a + b = -3$

Passaggio per A: $2 = c$
Passaggio per B: $0 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c, \;\; a + 2b + 4c = 0$

Quindi:

$$\begin{cases} a+b=-3 \\ 2=c \\ a+2b+4c=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} c=2 \\ a+b=-3 \\ a+2b=-8 \end{cases} ; \quad \begin{cases} c=2 \\ a+b=-3 \\ b=-5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} c=2 \\ a=2 \\ b=-5 \end{cases}$$

La funzione ha quindi la seguente equazione:

$y = 2sen^2x - 5senx + 2$

2)

Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

$y = f(x) = 2sen^2x - 5senx + 2 \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi$

Dominio: $0 \le x \le 2\pi$

Simmetrie notevoli:

Visto l'intervallo di studio, non si pone il problema se la funzione è pari o dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se x= 0 , $y = 2$.
Se $y = 0$, $2sen^2x - 5senx + 2 = 0$, $senx = 2$ (mai) $e\ senx = \frac{1}{2}$ $da\ cui$ $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$

Segno della funzione:

$$y > 0 \quad se \quad 2sen^2x - 5senx + 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad sex < \frac{1}{2} \quad or \quad senx > 2\ (mai)$$

$\Longrightarrow$ $sex < \frac{1}{2}$: $0 < x < \frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{5}\pi < x < 2\pi$

Limiti:

La funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato.

Derivata prima:

$$f'(x) = 2senxcosx - 5cosx \geq 0,\quad cosx(2senx - 5) > 0 \quad \Longrightarrow \quad cosx < 0: \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$$

In tali intervalli la funzione è crescente.

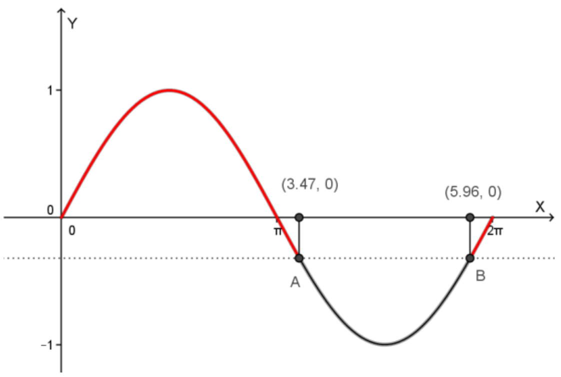
$x = \frac{\pi}{2}$ punto di minimo relativo (e assoluto), con ordinata: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$x = \frac{3}{2}\pi$ punto di massimo relativo (e assoluto), con ordinata: $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 9$

Derivata seconda:

$$f''(x) = -senx(2senx - 5) + cosx(2cosx) = -2sen^2x + 5senx + 2\cos^2 x =$$

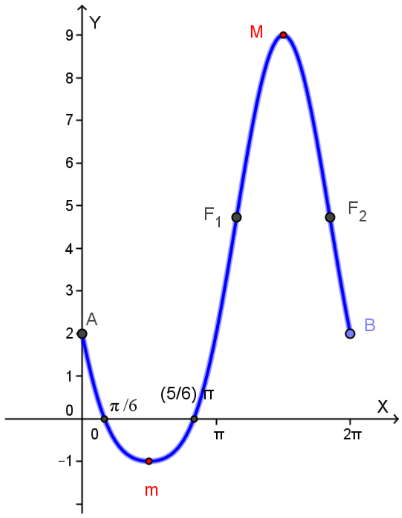
$$= -4sen^2x + 5senx + 2 \geq 0 \quad se \quad \frac{5-\sqrt{57}}{8} \leq sen\,x \leq \frac{\sqrt{57}+5}{8}$$

$\frac{5-\sqrt{57}}{8} \cong -0.32$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{57}+5}{8} \cong 1.57$ $\qquad$ quindi $sen\,x \geq \frac{5-\sqrt{57}}{8}$



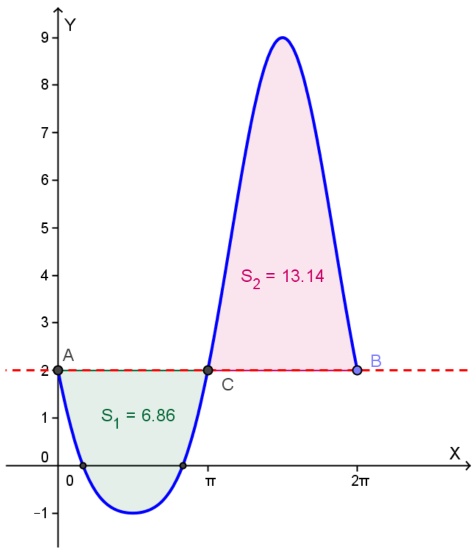
$$0 \leq x \leq 3.47 \quad e \quad 5.96 \leq x \leq 2\pi$$

In tali intervalli la concavità è verso l'alto, quindi abbiamo due flessi per $x = 3.47$ e $x = 5.96$ con ordinata 4.73



3)

Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta y=2 e la curva stessa.



Cerchiamo l'ascissa di C:

$$\begin{cases} y = 2sen^2x - 5senx + 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2sen^2x - 5senx = 0 \quad \Longrightarrow sen\ x = 0 \ \ oppure \quad senx = \frac{5}{2}$$

Da $sen\ x = 0$ troviamo l'ascissa di C: $x = \pi$

Le due aree si calcolano mediante i seguenti integrali:

$S_1 = \int_0^{\pi}[2 - (2sen^2x - 5senx + 2)\ ]dx$ e $S_2 = \int_{\pi}^{2\pi}[(2sen^2x - 5senx + 2) - 2\ ]dx$

$S_1 = \int_0^{\pi}[-2sen^2x + 5senx\,]\,dx$ e $S_2 = \int_{\pi}^{2\pi}[2sen^2x - 5senx\,]dx$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito:

$$\int (2sen^2x - 5senx\,)\,dx = \int (1 - \cos(2x) - 5senx\,)\,dx = x - \frac{1}{2}sen(2x) + 5cosx + k$$

Quindi:

$$S_1 = \int_0^{\pi}[-2sen^2x + 5senx\,]\,dx = \left[-x + \frac{1}{2}sen(2x) - 5cosx\right]_0^{\pi} = -\pi + 5 - (-5) =$$

$$= (10 - \pi)\,u^2 \cong 6.86\,u^2 = S_1$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi}[2sen^2x - 5senx\,]dx = \left[x - \frac{1}{2}sen(2x) + 5cosx\right]_{\pi}^{2\pi} = 2\pi + 5 - (\pi - 5) =$$

$$= (\pi + 10\,)\,u^2 \cong 13.14\,u^2 = S_2$$

4)

Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per P(0,6) e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

La generica primitiva della funzione data è:

$$F(x) = \int (2sen^2x - 5senx + 2)\,dx = \int (1 - \cos(2x) - 5senx + 2)\;dx =$$
$$= 3x - \frac{1}{2}sen(2x) + 5cosx + k.$$

Imponendo il passaggio per *P(0,6)* otteniamo:

$6 = 5 + k \quad \Longrightarrow \quad k = 1$. Quindi la primitiva passante per P ha equazione:

$$F(x) = 3x - \frac{1}{2}sen(2x) + 5cosx + 1$$

La tangente in P ha equazione:

$$y - 6 = F'(0)(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y - 6 = 2x \quad \Longrightarrow \quad y = 2x + 6$$

(notiamo che $F'(x) = 2sen^2x - 5senx + 2$).

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri