PNI 2008 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & per\ \ x \leq 0 \\ \frac{e^x-1}{x} & per\ \ x > 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile nel punto x=0.

Per essere continua in x=0 deve essere:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = b$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(ax+b) = b$

Quindi, per essere continua deve essere: b=1.
Analizziamo la derivabilità:

se x<0: $f'(x) = a$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = a$

se x>0: $f'(x) = \frac{e^x \cdot x-(e^x-1)}{x^2}$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \cdot x-(e^x-1)}{x^2}$

In base allo sviluppo di Mc Laurin, per $x \to 0$ risulta: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, quindi:

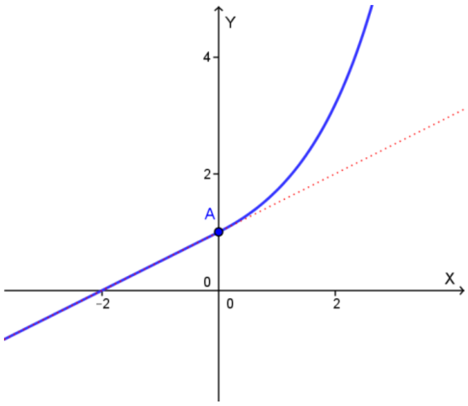
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ - 1\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Oppure, applicando la regola di De l'Hôpital, di cui sono verificate le ipotesi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x x + e^x - e^x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Affinché la funzione sia derivabile in x=0 deve quindi essere: $a = \frac{1}{2}\ \ e\ b = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & per\ \ x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & per\ \ x > 0 \end{cases}$$



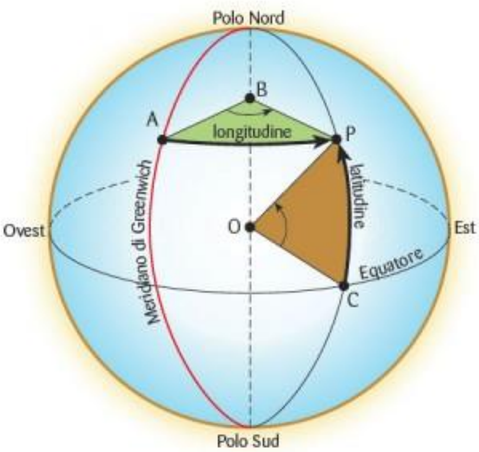
QUESITO 2

Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine λ = 23° 27' nord)?

Ricordiamo che l'area della calotta sferica a due basi (detta anche zona sferica) è data da:

$$S = 2\pi Rh$$

Con R raggio della sfera e h altezza della calotta (distanza tra i due piani secanti).



Nel nostro caso $h = OB$. Essendo la latitudine pari a

λ = 23° 27', l'angolo POB è uguale a:

90°-23°27'=66°33' , quindi:

$$h = OB = OP \cdot \cos(66°33') = R_T \cdot \cos(66°33') = \\ = 0.398 \cdot R_T$$

La probabilità richiesta è data da:

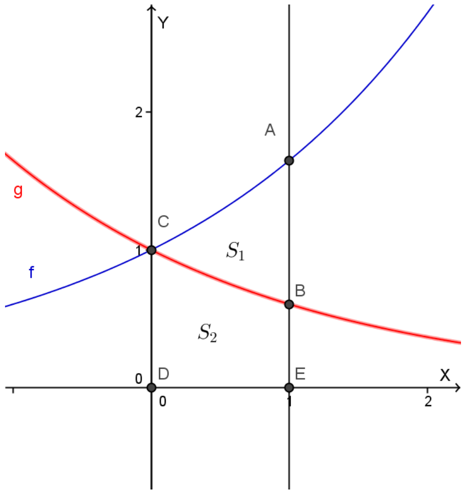
$$p = \frac{Superficie\ favorevole}{Superficie\ possibile} = \frac{S(calotta)}{S(sfera)} = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$$

$p = \frac{h}{2R} = \frac{R_T \cdot \cos(66°33')}{2R_T} = \frac{\cos(66°33')}{2} \cong 0.199 \cong 20\%$

QUESITO 3

Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione $g(x) = e^{-\lambda x}$ divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $f(x) = e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette x = 0 e x = 1.

Con λ >0 le due funzioni hanno grafici del tipo:



Dovrà essere: $S_1 = S_2$, quindi:

$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 g(x)dx \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)dx = \int_0^1 e^{-\lambda x}dx$ quindi:

$$\left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^1 \quad \Longrightarrow \frac{1}{\lambda}e^{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} - \frac{2}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda} \quad \Longrightarrow e^{\lambda} + \ e^{-\lambda} - 2 = -e^{-\lambda} + 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{\lambda} + 2e^{-\lambda} - 3 = 0$$

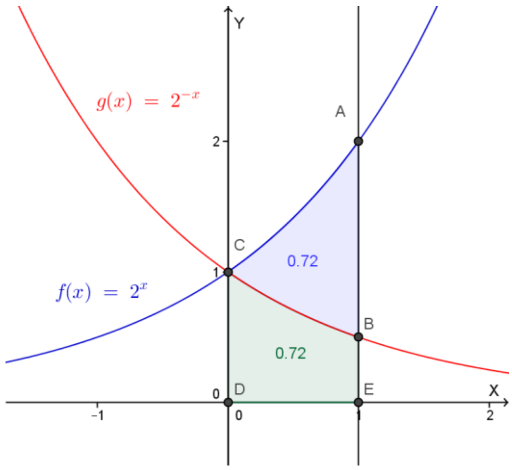
$e^{2\lambda} + 2 - 3e^{\lambda} = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2\lambda} - 3e^{\lambda} + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{\lambda} = 1 \ \ oppure \ \ e^{\lambda} = 2$ da cui:

$\lambda = 0 \ \ (non\ accettabile)$ oppure $\lambda = \ln(2) \quad accettabile\ .$

Le funzioni in tal caso sono:

$g(x) = e^{-(\ln(2))x} = (e^{ln2})^{-x} = 2^{-x}$ ed $f(x) = e^{(ln2)x} = 2^{x}$

Che hanno i seguenti grafici:



QUESITO 4

Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.

La probabilità di UN SUCCESSO (testa in un lancio) è data da: $p = \frac{1}{2}$.
La probabilità di avere x=4 successi in n=8 lanci (distribuzione binomiale) è data da:

$$p = p(n,x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 70 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} \cong 0.273 = 27.3\ \%$$

QUESITO 5

Si dimostri che l'equazione $(3-x)e^x - 3 = 0$ per $x > 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

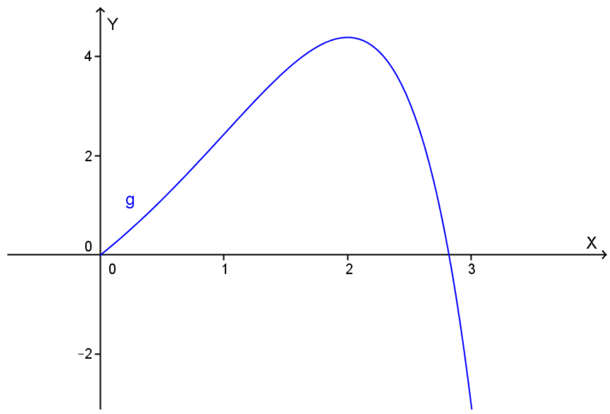
Studiamo in modo sommario la funzione di equazione $g(x) = (3-x)e^x - 3$.

La funzione è continua per ogni x (quindi anche per x>0), g(0)=0 , per x che tende a $+\infty$ tende a $-\infty$, la sua derivata prima

$g'(x) = -e^x + (3-x)e^x = e^x(2-x) > 0 \ \ se \ \ x < 2$: quindi la funzione è crescente per

$0 < x < 2$ e decrescente per $x > 2$, con $g(2) = e^2 - 3 > 0$: la funzione ha pertanto un solo zero per x>2. Risulta:
$g(3) = -3 < 0$, $g(2.5) = 0.5e^{2.5} - 3 \cong 3.1 > 0$ possiamo quindi affermare che l'equazione

$(3-x)e^x - 3 = 0$ *per* $x > 0$ ha una sola radice, compresa tra 2.5 e 3.

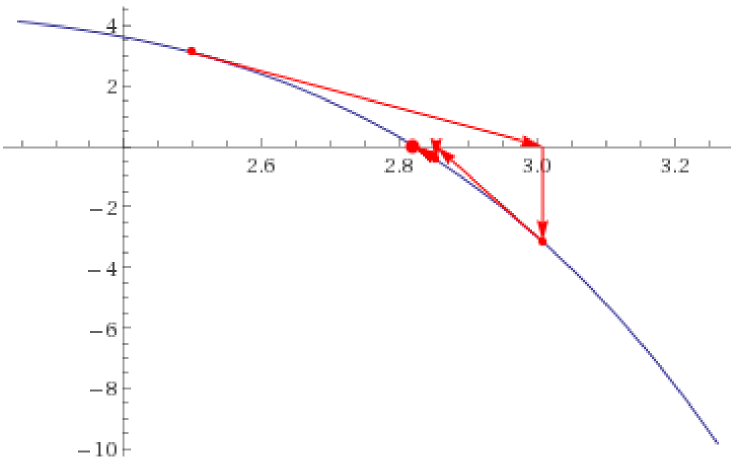


Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$g'(x) = e^x(2-x)$, $g''(x) = e^x(2-x) - e^x = e^x(1-x)$

quindi il grafico, nell'intervallo che ci interessa, $2.5 \leq x \leq 3$, volge sempre la concavità verso il basso: possiamo pertanto applicare il metodo di Newton.

Risulta poi: $g''(x) \cdot g(2.5) < 0$, pertanto il punto iniziale dell'iterazione è $x_0 = a = 2.5$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n}(3-x_n)-3}{e^{x_n}(3-x_n)-e^{x_n}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2.5 - \frac{g(2)}{g'(2)} \cong 3.0075$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \cong 2.8529$$

$$x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} \cong 2.8225$$

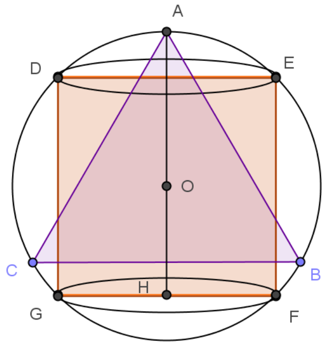
$$x_4 = x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} \cong 2.8214$$

$$x_5 = x_4 - \frac{g(x_4)}{g'(x_4)} \cong 2.8214$$

Quindi la radice approssimata a meno di 1/100 è $x_0 = 2.82$

QUESITO 6

Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.



Il cilindro equilatero inscritto nella sfera di raggio r ha il diametro di base GF (uguale all'altezza del cilindro stesso) che equivale al lato del quadrato di diagonale 2r; quindi:

$$GF = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}\,, \quad r(cilindro) = \frac{r\sqrt{2}}{2} \quad , \quad h(cilindro) = GF = r\sqrt{2}$$

Il volume del cilindro è quindi:

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot r\sqrt{2} = \pi r^3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il diametro di base del cono equilatero inscritto nella sfera di raggio r (diametro di base che è uguale all'apotema) equivale al lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio r, quindi è pari a $diametro(cono) = r\sqrt{3}$. L'altezza del cono è uguale all'altezza del suddetto triangolo, quindi: $h = AH = \frac{3}{2}r$. Pertanto:

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}r = \frac{3}{8}\pi r^3$$

Il volume della sfera è:

$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$V(cono):V(cilindro) = V(cilindro):V(sfera)$$

Risulta infatti:

$$V(cono):V(cilindro) = \frac{\frac{3}{8}\pi r^3}{\pi r^3 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$V(cilindro):V(sfera) = \frac{\pi r^3 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

QUESITO 7

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$ *nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 1.*

Il valor medio f(c) è dato da:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \int_0^1 \arccos\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int \arccos\sqrt{1-x^2}\, dx = \int (x)' \cdot \arccos\sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot \arccos\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\, dx =$$

$$= x \cdot \arccos\sqrt{1-x^2} + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \arccos\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} + k$$

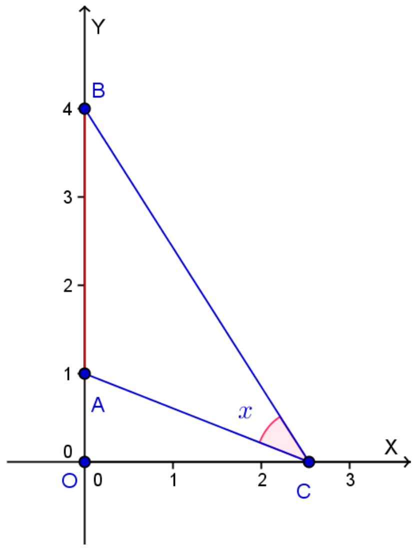
Quindi:

$$\int_0^1 \arccos\sqrt{1-x^2}\, dx = \left[x \cdot \arccos\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1 \cdot \arccos(0) + 0 - (0+1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 \cong 0.57 = f(c) = valor\ medio$$

QUESITO 8

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti A(0,1), B(0,4). Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di massima ampiezza.



Indicato con x l'angolo ACB, e posto $C = (t; 0)$, $con\ t > 0$, cerchiamo la l'angolo formato dalle rette AC e BC.

$$m_{AC} = -\frac{1}{t} \quad , \quad m_{BC} = -\frac{4}{t} \quad , \quad tgx = \frac{-\frac{1}{t} + \frac{4}{t}}{1 + \frac{4}{t^2}} = \frac{\frac{3}{t}}{\frac{t^2+4}{t^2}} = \frac{3t}{t^2+4} = f(t)$$

Cerchiamo il massimo di questa funzione per t>0.

$$f'(t) = \frac{-3t^2 + 12}{(t^2+4)^2} \geq 0 \quad se \quad -2 \leq t \leq 2$$

Quindi la funzione cresce se 0<t<2 e decresce se t>2: per t=2 abbiamo il massimo assoluto. Quindi il massimo di tgx si ha per t=2; per tale valore di t è massimo anche l'angolo x.

Il punto C richiesto ha quindi coordinate $C = (2; 0)$.

Siccome $tgx = \frac{3t}{t^2+4} = f(t)$, il suo massimo è $f(2) = \frac{3}{4}$.

Il massimo valore dell'angolo x è quindi $x = arctg\left(\frac{3}{4}\right) \cong 36.87° \cong 36°52'$

QUESITO 9

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{\log x}} \frac{e^t}{t^2}\, dt$$

nel punto P di ascissa $x = e$.

Notiamo intanto che $f(e) = 0$, poiché gli estremi dell'integrale sono uguali.
Calcoliamo ora il coefficiente angolare della tangente, che equivale ad $f'(e)$.
Ricordiamo che:

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt \implies f'(x) = g(x), \qquad f(x) = \int_a^{b(x)} g(t)dt \implies f'(x) = g(b(x)) \cdot b'(x)$$

Nel nostro caso:

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{\left(\sqrt{\log x}\right)^2} \cdot \left[\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\log x}}\right] \implies f'(e) = \frac{e}{1} \cdot \frac{\frac{1}{e}}{2} = \frac{1}{2}$$

Quindi la tangente richiesta ha equazione:

$$y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x - e) \implies y = \frac{1}{2} \cdot (x - e)$$

QUESITO 10

Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

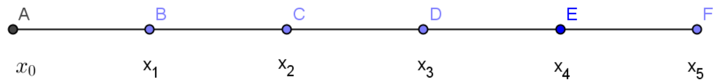
si calcoli un'approssimazione di π*, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.*

Posto $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, consideriamo l'intervallo $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ e dividiamolo in n parti; poniamo $h = \frac{\frac{1}{2}-0}{n} = \frac{1}{2n}$.

Utilizzando, per esempio, la formula dei trapezi, l'integrale dato può essere approssimato mediante la formula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso, ponendo per esempio n=5, abbiamo $h=\frac{1}{10}$



$$x_0=0,\ \ x_1=\frac{1}{10},\ \ \ x_2=\frac{2}{10},\ \ x_3=\frac{3}{10},\ \ \ x_4=\frac{4}{10},\ \ \ x_5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Quindi si ha la seguente approssimazione:

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong \frac{1}{10}\cdot\left[\frac{f(0)+f(0.5)}{2}+f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)\right] \cong 0.5242$$

Quindi: $\frac{\pi}{6} \cong 0.5242$ da cui $\pi \cong 3.1452$

Notiamo che il valore esatto di π è: 3.14159...