# ORDINAMENTO 2008 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

*Sia data la parabola:* $y = ax^2 + bx + c$ .

## 1)

*Si determinino a, b, c, in modo che la parabola passi per i punti A(0;-6), B(1;0) e nel punto B sia tangente alla retta di coefficiente angolare 5.*

Osservando che la tangenza in B alla retta con coefficiente angolare 5 corrisponde a $y'(1) = 5$ , $cioè$ $(2ax + b)_{x=1} = 5$ , $2a + b = 5$ abbiamo:

$$\begin{cases} -6 = c \\ 0 = a + b + c \\ 2a + b = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} c = -6 \\ a + b = 6 \\ 2a + b = 5 \end{cases} ; \ sottraiamo\ seconda\ e\ terza \ \begin{cases} c = -6 \\ a + b = 6 \\ a = -1 \end{cases} ; \ \begin{cases} c = -6 \\ b = 7 \\ a = -1 \end{cases}$$

La parabola richiesta ha quindi equazione: $y = -x^2 + 7x - 6$

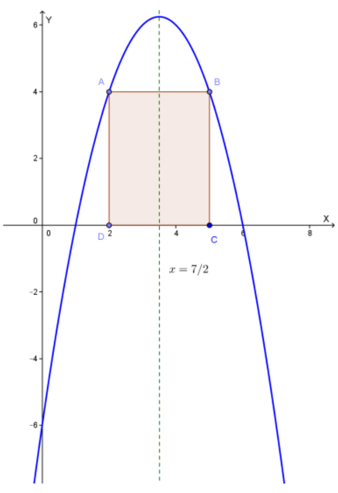
## 2)

*Si determinino le misure dei lati del rettangolo di perimetro massimo inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x.*

Rappresentiamo graficamente la parabola, che ha vertice nel punto:

$$x_V = \frac{7}{2}; \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49 - 24}{-4} = \frac{25}{4} \quad ; \qquad V = \left(\frac{7}{2}; \frac{25}{4}\right)$$

Se x=0, y=-6; se y=0: $-x^2 + 7x - 6 = 0,\ x^2 - 7x + 6 = 0:\ x = 1,\ x = 6$




Indichiamo con $A = (x; -x^2 + 7x - 6)$ il vertice del rettangolo appartenente alla parabola con ascissa compresa tra 0 e 7/2.

Risulta: $AB = 2\left(\frac{7}{2} - x\right) \quad e \quad AD = -x^2 + 7x - 6.$

Il perimetro del rettangolo è quindi:

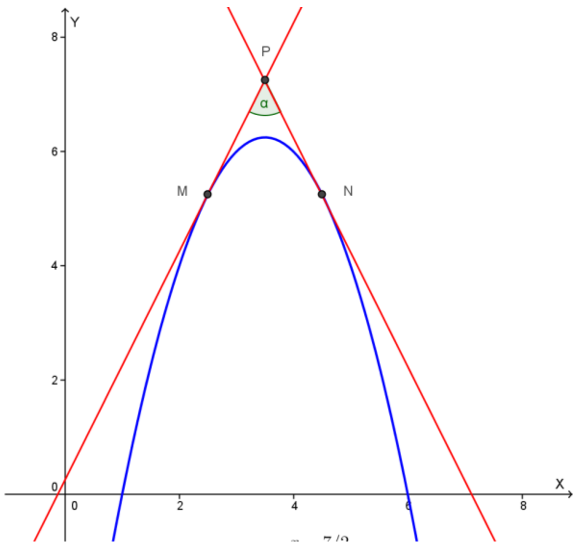
$$2p = 2(7 - 2x) + 2(-x^2 + 7x - 6) = -2x^2 + 10x + 2$$

Tale perimetro è massimo se lo è: $p = -x^2 + 5x - 3;$
Trattandosi di una parabola con la concavità verso il basso, il massimo è nel vertice, cioè per $x = \frac{5}{2}$. Il rettangolo di perimetro massimo ha quindi lati di misura: $AB = 2;\ AD = \frac{21}{4}$.

## 3)

*Trovato questo rettangolo ed essendo M ed N i due suoi vertici che stanno sulla parabola, si calcoli, in gradi e primi (sessagesimali), l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle due tangenti alla parabola in M ed N.*

Il vertice M del rettangolo che sta sulla parabola di ascissa 5/2 è: $M = \left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$.
L'altro vertice, N, che sta sulla parabola è il simmetrico di M rispetto all'asse della parabola, quindi la sua ascissa è: $x_N = 2 \cdot \frac{7}{2} - x_M = 7 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$ : $\quad N = \left(\frac{9}{2}; \frac{21}{4}\right)$.




$y = -x^2 + 7x - 6\ ,\quad y' = -2x + 7$

Il coefficiente angolare della tangente in M è: $y'\left(\frac{5}{2}\right) = 2$.
Il coefficiente angolare della tangente in N è: $y'\left(\frac{9}{2}\right) = -2$.

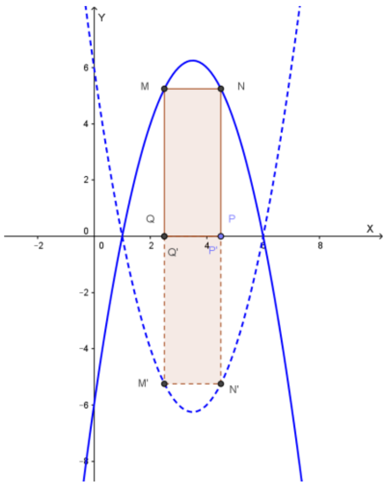
L'angolo acuto formato dalle due tangenti ha la tangente uguale a:

$$tg\alpha = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right| = \left|\frac{4}{1-4} = \frac{4}{3}\right|,\quad \alpha = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53.13° \cong 53°08'$$

## 4)

*Si calcoli il rapporto tra i volumi dei solidi generati in una rotazione attorno all'asse x dal segmento parabolico e dal rettangolo di perimetro massimo considerato.*

Rappresentiamo graficamente la situazione proposta:




Sia $V_1$ il volume generato dal segmento parabolico:

$$V_1 = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_1^6 (-x^2+7x-6)^2 dx = \pi \int_1^6 (x^4-14x^3+61x^2-84x+36)dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{61}{3}x^3 - 42x^2 + 36x\right]_1^6 = \pi \cdot \frac{625}{6} \ u^3 = V_1$$

Sia $V_2$ il volume generato dal rettangolo (volume cilindro di raggio MQ e altezza MN):

$$V_2 = \pi \cdot MQ^2 \cdot MN = \pi \cdot \left(\frac{21}{4}\right)^2 \cdot 2 = \pi \cdot \frac{441}{8} \ u^3 = V_2$$

Il rapporto fra i due volumi è:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot \frac{625}{6}}{\pi \cdot \frac{441}{8}} = \frac{625}{6} \cdot \frac{8}{441} = \frac{2500}{1323}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria