# ORDINAMENTO 2008 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

*Si consideri la funzione:* $f(x) = log\frac{x+1}{x^2+2}$ .

## 1)

*Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico* $\gamma$*, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.*

Intendiamo il logaritmo in base e: $\boldsymbol{f(x) = ln\frac{x+1}{x^2+2}}$

**Dominio:**

$\frac{x+1}{x^2+2} > 0\,,\quad x > -1\;,\qquad -1 < x < +\infty$

**Intersezioni con gli assi:**

Se x=0, $y = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2 \cong -0.7$

Visto il dominio, la funzione non può pari né dispari.

**Segno della funzione:**

$f(x) > 0$ se $\frac{x+1}{x^2+2} > 1,\ x+1 > x^2+2\,,\ x^2 - x + 1 < 0,\ \ mai,\ poiché\ \Delta = 1 - 4 < 0$

Quindi la funzione è sempre negativa.

**Limiti:**

$\lim_{x\to(-1)^+} ln\frac{x+1}{x^2+2} = -\infty$ $, x = -1$ asintoto verticale.

$\lim_{x\to+\infty} ln\frac{x+1}{x^2+2} = -\infty$ ; non può esserci asintoto obliquo, poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

**Derivata prima:**

$f'(x) = \frac{-x^2-2x+2}{(x+1)(x^2+2)} \geq 0\ \ se\ \ -x^2-2x+2 \geq 0,\ \ x^2+2x-2 \leq 0,$

$-\sqrt{3}-1 \leq x \leq \sqrt{3}-1, e\ tenendo\ conto\ che\ x > -1\text{:}\ -1 < x \leq \sqrt{3}-1.$
Quindi la funzione è crescente se $-1 < x < \sqrt{3}-1$ e decrescente se $x > \sqrt{3}-1$;
avremo un massimo relativo, che è anche assoluto, se $x = \sqrt{3}-1 \cong 0.7$, con ordinata:

$$f(\sqrt{3}-1) = ln\frac{\sqrt{3}+1}{4} \cong -0.4$$

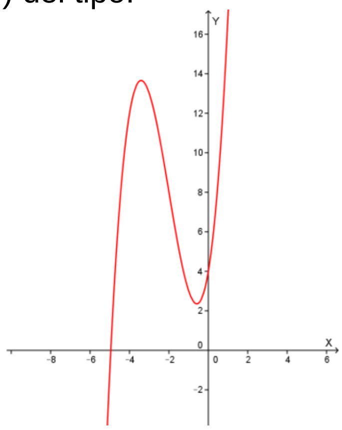
**Derivata seconda:**

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x+1)(x^2+2)-(-x^2-2x+2)(3x^2+2x+2)}{(x+1)^2(x^2+2)^2} =$$

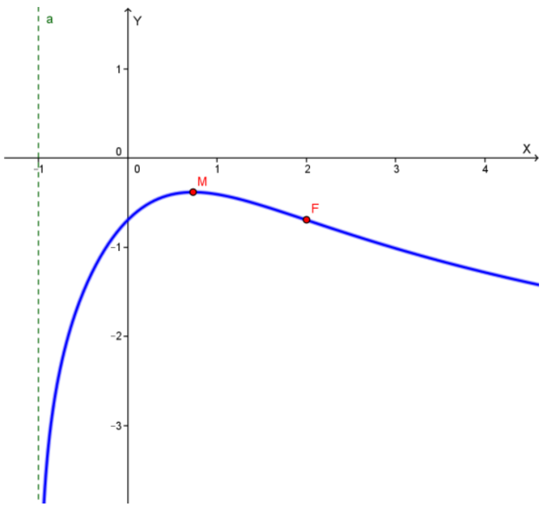
$= \frac{(x-2)(x^3+6x^2+6x+4)}{(x+1)^2(x^2+2)^2} \geq 0 \quad se\ x \geq 2$ ; quindi la curva volge la concavità verso il basso se

$-1 < x < 2$ e verso l'alto se $x > 2$ ; x=2 è un punto di flesso, con ordinata $-ln2 \cong -0.7$

Osserviamo che $(x^3+6x^2+6x+4)$ è sempre positivo per x>-1 , essendo il suo grafico (da studiare qualitativamente a parte) del tipo:

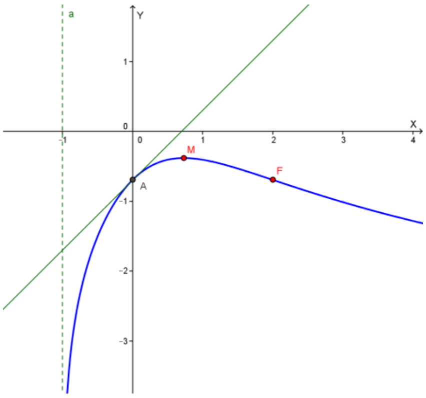



Il grafico della funzione è il seguente:



## 2)

*Si scriva l'equazione della tangente alla curva $\gamma$ nel punto di intersezione con l'asse y.*



Il punto di intersezione della curva con l'asse y ha coordinate: $A = (0; -ln2)$. Il coefficiente angolare della tangente in A è: $f'(0) = 1$. L'equazione dlla tangente in A è quindi:

$$y + ln2 = x\,, \quad y = x - ln2$$

## 3)

*Si studi la funzione* $g(x) = e^{f(x)}$ e se ne tracci il grafico $\Gamma$ .

Si può osservare che $g(x) = e^{f(x)} = e^{ln\frac{x+1}{x^2+2}} = \frac{x+1}{x^2+2}$ $\quad con\ x > -1$ e studiare tale funzione, oppure dedurre il grafico della g a partire dal grafico della f; usiamo questo secondo metodo, poiché il primo si riduce al semplice studio di una funzione razionale fratta.

$y = g(x) = e^{f(x)}$

La funzione ha lo stesso dominio di g ed è sempre positiva, inoltre cresce dove cresce la f. Calcoliamo i limiti:

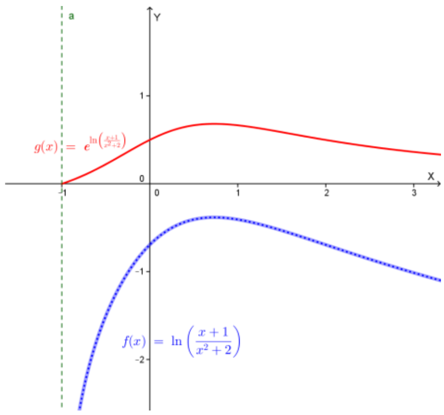
$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{f(x)} = 0^+ \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} e^{f(x)} = 0^+ : \quad y = 0\ \ asintoto\ orizzontale.$$

Siccome f ha un massimo per $x = \sqrt{3} - 1$ con ordinata $f(\sqrt{3} - 1) = ln\frac{\sqrt{3}+1}{4}$, la g avrà un massimo nella stessa ascissa, con ordinata $e^{ln\frac{\sqrt{3}+1}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.
La concavità e gli eventuali flessi della g non possono essere dedotti graficamente; per la loro determinazione è necessario ricorrere all'equazione $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$.

$$g'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 2)^2}\,, \quad g''(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 12x - 4}{(x^2 + 2)^3} \geq 0 \quad se \quad 2x^3 + 6x^2 - 12x - 4 \geq 0$$

Le radici associate a questa disequazione non possono essere determinate algebricamente, ma possiamo ipotizzare (viste le altre informazioni) un flesso tra -1 e 0 ed un flesso dopo il massimo.

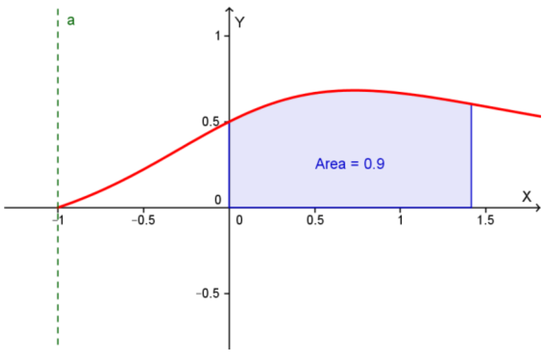
L'andamento qualitativo della funzione g è indicato nel seguente grafico, insieme a quello della f:




## 4)

*Si calcoli l'area della superficie piana delimitata dalla curva* $\Gamma$*, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione* $x = \sqrt{2}$*.*

Rappresentiamo graficamente la situazione proposta:




L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} ln4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} ln2 = ln2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} ln2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,ln2 + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}\right) u^2 \cong 0.90\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria