ORDINAMENTO 2008 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione $F(x) = a\, cosx + b\cos^3 x$ sia una primitiva della funzione $f(x) = 3\, sen\, x - 2sen^3x$.

F(x) è una primitiva di f(x) se F'(x)=f(x). Quindi:

$$F'(x) = -a\, senx - 3b\, cos^2x\, senx = 3\, sen\, x - 2sen^3x$$

$$-a\, senx - 3b\,(1 - sen^2x)senx = -a\, senx - 3b\, senx + 3bsen^3x = 3\, sen\, x - 2sen^3x$$

se:

$$\begin{cases} -a - 3b = 3 \\ 3b = -2 \end{cases} ; \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi F(x) è una primitiva di f(x) se $a = -1 \quad e \quad b = -\frac{2}{3}$.

QUESITO 2

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = arctanx - \frac{x}{1+x^2}$.

La funzione è definita e continua su tutto R, quindi non ci sono asintoti verticali.

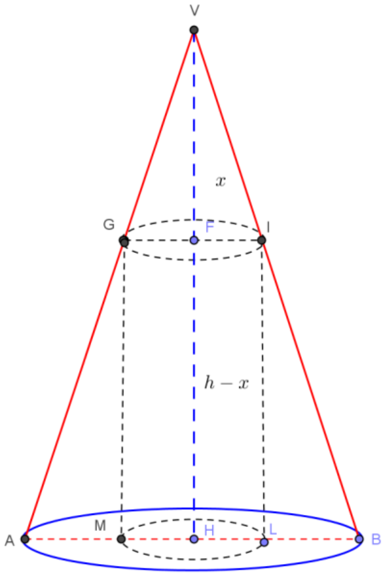
$$\lim_{x\to-\infty}\left(arctanx - \frac{x}{1+x^2}\right) = -\frac{\pi}{2} : \quad y = -\frac{\pi}{2} \quad asintoto\ orizzontale\ per\ x \to -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(arctanx - \frac{x}{1+x^2}\right) = +\frac{\pi}{2} : \quad y = +\frac{\pi}{2} \quad asintoto\ orizzontale\ per\ x \to +\infty$$

Essendoci gli asintoti orizzontali sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$ non possono esserci asintoti obliqui.

QUESITO 3

Fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto, avente raggio di base r e altezza h, si trovi quello di volume massimo.



Indicata con x la distanza della base superiore del cilindro dal vertice del cono si ha:

$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot FG^2 \cdot (h - x)$

Troviamo FG, raggio del cilindro, in funzione di x:

$AH: FG = VH: VF\ ,\quad r: FG = h: x,\quad FG = \dfrac{x \cdot r}{h}$

Quindi:

$V(cilindro) = \ \pi \cdot \left(\dfrac{x \cdot r}{h}\right)^2 \cdot (h - x) = \dfrac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x)$

Tale volume è massimo se lo è:

$y = x^2 \cdot (h - x),\quad con\ \ 0 \leq x \leq h$

Il problema è di facile soluzione con l'uso delle derivate, proponiamo un metodo elementare.

Ricordiamo che se $a + b = costante$ il prodotto di due potenze di a e b è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti. Nel nostro caso: a=x e b=h-x .

Quindi $x^2 \cdot (h - x)$ è massimo se: $\frac{x}{2} = \frac{h-x}{1}\ ,\ \ x = 2h - 2x\ ,\ \ x = \frac{2}{3}h$.

Per tale valore di x l'altezza del cilindro è: $h - x = \frac{1}{3}h$.

Il cilindro di volume massimo è quindi quello la cui altezza è un terzo dell'altezza del cono.

QUESITO 4

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{\sqrt{4x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases} .$$

Se ne studi la continuità per x =0 e poi si tracci il suo grafico.

Calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(3x + \frac{\sqrt{4x^2}}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(3x + \frac{2x}{x}\right) = 2 = f(0) \ : continua\ da\ destra$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(3x + \frac{\sqrt{4x^2}}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(3x + \frac{-2x}{x}\right) = -2 \ : non\ continua\ da\ destra$$

La funzione NON è continua per x=0, dove c'è una discontinuità di prima specie con salto 4.

QUESITO 5

Si consideri la seguente proposizione: "Due piani α e β sono tra loro perpendicolari se e solo se ogni retta di α è perpendicolare a ogni retta di β". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

La proposizione è FALSA. Due piani α e β si dicono perpendicolari se esiste ALMENO UNA retta di α che sia perpendicolare a β . Se ne esiste una poi ne esistono infinite.

Un'altra possibile definizione, generalizzazione della perpendicolarità fra rette del piano, è la seguente: due piani si dicono perpendicolari se, incontrandosi, formano quattro angoli diedri congruenti.

QUESITO 6

Si determini, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = sen^2 x$ *in* $x = \frac{\pi}{4}$.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$; nel nostro caso:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen^2\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - sen^2\frac{\pi}{4}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(sen\frac{\pi}{4}cosh + \cos\frac{\pi}{4}senh\right)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos^2 h + 2senh\ cosh + \cos^2 h) - \frac{1}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+sen2h) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}sen2h}{h} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 = f'\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

QUESITO 7

Si provi che alla funzione $f(x) = tanx + senx$ *nell'intervallo* $0 \le x \le \pi$ *, non è applicabile il teorema di Rolle.*

La funzione $tanx$ non è continua in $\frac{\pi}{2}$ quindi f(x) non è continua nell'intervallo chiuso e limitato $0 \le x \le \pi$ come richiede il teorema di Rolle: il teorema non è quindi applicabile.

QUESITO 8

Si calcoli il valor medio della funzione $y = \frac{x^4+1}{x^2+1}$ *nell'intervallo* $0 \le x \le 1$.

Ricordiamo che il valor medio di una funzione f(x) continua in un intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-0}\cdot\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^4-1+2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^4-1}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}dx + 2[arctgx]_0^1 = \int_0^1 (x^2-1)dx + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 + \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} \cong 0.904$$

QUESITO 9

Si determini il campo di esistenza della funzione $y = log\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x + 4\ \right)$.

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x} - x + 4 > 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \leq 0\ ;\ x \geq 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x} > x - 4 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda disequazione, che equivale ai due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 2x > (x-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0\ ;\ x \geq 2 \\ x < 4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ 6x > 16 \end{cases}$$

$x \leq 0\,;\ \ 2 \leq x < 4 \qquad \cup \qquad x \geq 4$

Unendo le soluzioni si ha: $x \leq 0\,;\ \ x \geq 2$

Torniamo al sistema iniziale:

$$\begin{cases} x \leq 0\ ;\ x \geq 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x} > x - 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \leq 0\ ;\ x \geq 2 \\ x \leq 0\,;\ x \geq 2 \end{cases}$$

Il campo di esistenza della funzione è: $-\infty < x \leq 0\ ;\ \ 2 \leq x < +\infty$.

QUESITO 10

Si calcoli il limite della funzione

$$\frac{e^{senx} - cosx}{e^{cosx} - e\log(x+e)}\ ,$$

quando x tende a 0.

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Trasformiamo la funzione (intendiamo il logaritmo nella base e):

$$\frac{e^{senx}-cosx}{e^{cosx}-e\log(x+e)}=\frac{(e^{senx}-1)+(1-cosx)}{e^{cosx}-e\,log\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)}=\frac{(e^{senx}-1)+(1-cosx)}{e^{cosx}-e\,\left(loge+log\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)}=$$

$$=\frac{(e^{senx}-1)+(1-cosx)}{e^{cosx}-e-e\cdot log\left(1+\frac{x}{e}\right)}\sim\frac{senx+\frac{1}{2}x^2}{e(e^{cosx-1}-1)-e\cdot\frac{x}{e}}\sim\frac{x+\frac{1}{2}x^2}{e(cosx-1)-x}\sim\frac{x}{e\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)-x}\sim$$

$$\sim\frac{x}{-x}\to -1\quad se\quad x\to 0\ .$$

Il limite della funzione per x che tende a 0 è -1.

N.B.

Ricordiamo che in base ai limiti notevoli si hanno i seguenti “asintotici” quando $f(x)\to 0$:

$$e^{f(x)}-1\sim f(x)\ ,\quad 1-cosx\sim\frac{1}{2}x^2\quad ,\quad ln\big(1+f(x)\big)\sim f(x)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria