PNI 2008 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si trattino le seguenti questioni.

1)

Si costruisca il grafico γ *della funzione* $f(x) = 2(2-x)\sqrt{x^2-1}$.

Dominio:

$x^2 - 1 \geq 0\ :\quad -\infty < x \leq -1\,,\ \ 1 \leq x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Siccome f(-x) è diversa sia da f(x) sia da –f(x) la funzione non è pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

x=0: non ha senso
y=0: x=2, x=1, x=-1

Segno della funzione:

$f(x) \geq 0\ \ se\ \ 2-x \geq 0\ \ ,\ \ x \leq 2$ (nel dominio della funzione)

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} 2(2-x)\sqrt{x^2-1} = +\infty$:

non può esserci asintoto obliquo poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

$\lim_{x\to+\infty} 2(2-x)\sqrt{x^2-1} = -\infty$:

non può esserci asintoto obliquo poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

Non esistono asintoti di alcun tipo.

Derivata prima:

$$f'(x) = -2\sqrt{x^2-1} + 2(2-x)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{-4x^2+4x+2}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0\ \ se\ \ -4x^2+4x+2 \geq 0\,,$$

$2x^2 - 2x - 1 \leq 0$, $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

Risulta: $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \cong -0.37 \quad e \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cong 1.37$

Quindi, tenendo conto del dominio: $f'(x) \geq 0 \ \ se \ \ 1 < x \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2}$; osserviamo che la funzione non è derivabile in x=1 ed x=-1 (dai limiti della derivata prima si scopre che in tali punti c'è tangente verticale).

La funzione è pertanto crescente se $1 < x < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ e decrescente se $x < -1$, $x > \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
Presenta un massimo relativo per $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, la cui ordinata è $f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \cong 1.18$.

Derivata seconda:

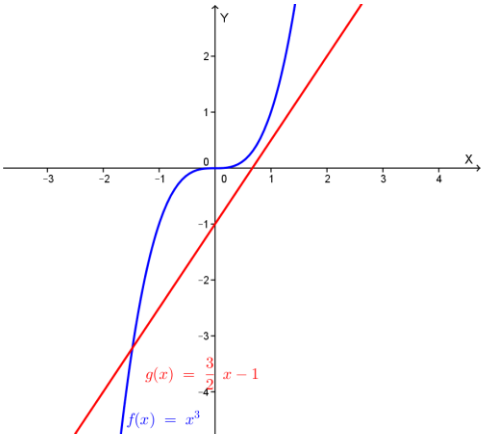
$$f''(x) = \frac{(-8x+4)\sqrt{x^2-1} - (-4x^2+4x+2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} =$$

$$= \frac{(-8x+4)(x^2-1) - x(-4x^2+4x+2)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{-4x^3+6x-4}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \geq 0 \ \ se:$$

$-4x^3 + 6x - 4 \geq 0$, $2x^3 - 3x + 2 \leq 0$

Tale disequazione equivale a: $x^3 \leq \frac{3}{2}x - 1$

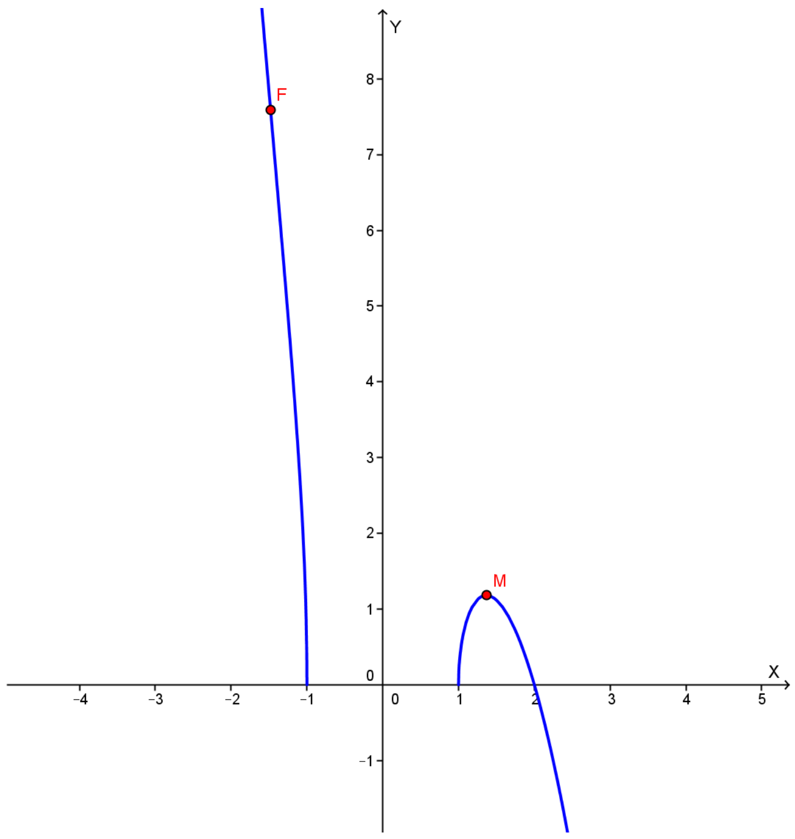
Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le curve di equazione $y = x^3 \quad e$
$y = \frac{3}{2}x - 1$:



Deduciamo graficamente che $f''(x) \geq 0$ per $x \leq a$, con $-2 < a < -1$.

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $x < a$ e verso l'alto se $x < a$ (sempre nel dominio della funzione). Pertanto in x=a si ha un flesso; da uno studio più approfondito risulta: $a \cong -1.5 \ ed \ f(a) \cong 7.6$).

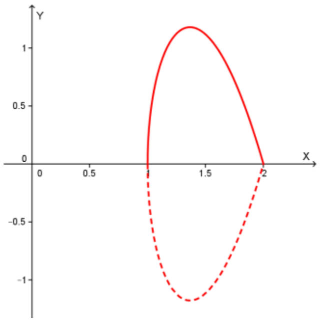
Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Si determini il volume del solido generato, in una rotazione completa attorno all'asse x, dalla superficie piana, finita, delimitata da γ e dall'asse x.

Rappresentiamo graficamente la superficie indicata:



Il volume richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_1^2 \left(2(2-x)\sqrt{x^2-1}\right)^2 dx = 4\pi \int_1^2 (2-x)^2(x^2-1)dx =$$

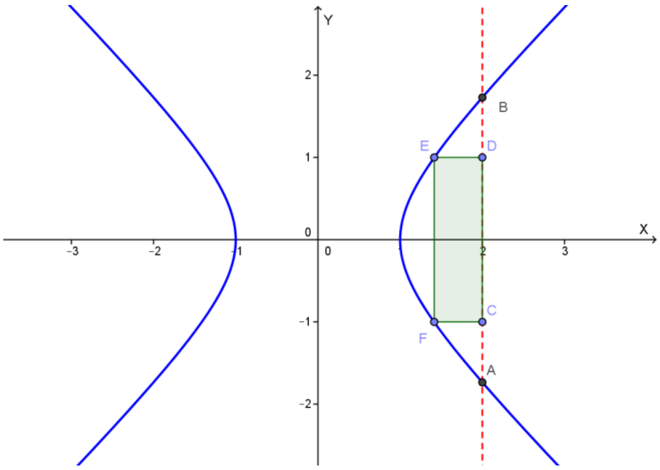
$= 4\pi \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4)dx = 4\pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x\right]_1^2 = \frac{4}{5}\pi\, u^3 \cong$

$\cong 2.513\, u^3 = V$

3)

La retta $x = 2$ *seca l'iperbole equilatera di equazione* $x^2 - y^2 = 1$ *nei punti A e B. Si inscriva nel segmento iperbolico di base AB il rettangolo di area massima. A tal fine, si indichi con x l'ascissa dei vertici del generico rettangolo, inscritto nel segmento iperbolico, appartenenti all'iperbole e si utilizzi la curva* γ *.*

Rappresentiamo graficamente l'iperbole ed il rettangolo:



Detti E ed F i vertici del rettangolo appartenenti all'iperbole, indicata con x la loro ascissa, l'ordinata di E (nel primo quadrante) è: $\sqrt{x^2 - 1}$.

L'area del rettangolo è:

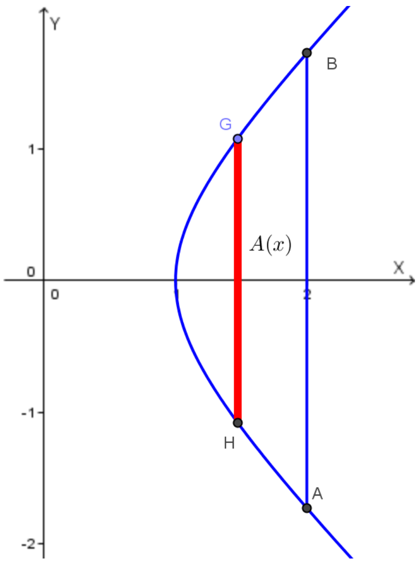
$Area(EFCD) = ED \cdot EF = (2 - x) \cdot 2\sqrt{x^2 - 1} = f(x), \qquad equazione\ di\ \gamma$

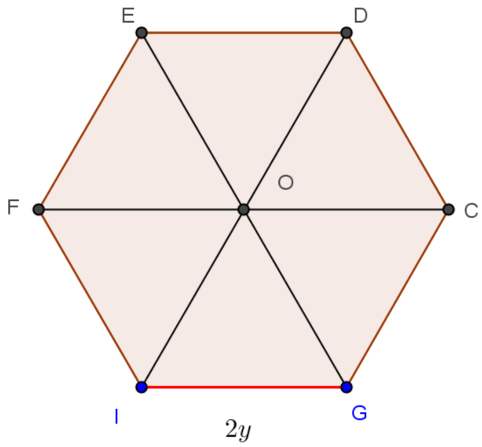
L'area è quindi massima quando lo è f(x), cioè per $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cong 1.37$. In corrispondenza di tale valore di x è facile determinare le coordinate dei vertici del rettangolo di area massima.

4)

Si calcoli il volume del solido che ha per base il segmento iperbolico prima considerato e tale che, tagliato con piani paralleli ad AB, dia tutte sezioni esagonali regolari.

Rappresentiamo graficamente la situazione proposta:





I piani paralleli ad Ab siano perpendicolari all'asse x. Detta A(x) l'area della sezione, il volume è dato da:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

$A(x)$ è l'area di un esagono regolare di lato 2y, essendo $y = \sqrt{x^2 - 1}$ l'ordinata di G.

$$A(x) = p \cdot a = 6y \cdot 2y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\, y^2 = 6\sqrt{3}\,(x^2 - 1)$$

Quindi:

$$V = \int_a^b A(x)dx = V = \int_1^2 6\sqrt{3}\,(x^2 - 1)dx = 6\sqrt{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = 6\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = 8\sqrt{3}\,u^3 =$$

$$\cong\ 13.856\, u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria