PNI 2008 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x^2-1)}} \ , & se\ |x| < 1; \\ 0, & se\ |x| \geq 1; \end{cases}$$

1)

Si dica se questa funzione è continua nei punti in cui $|x| = 1$.

Analizziamo la continuità in x=1:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (0) = 0 = f(1) : \qquad continua\ da\ destra\ in\ x = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{(x^2-1)}} = 0 = f(1) \ : \quad continua\ da\ sinistra\ in\ x = 1$$

La funzione è continua in x=1.

Analizziamo la continuità in x=-1:

Essendo la funzione pari, la funzione è continua anche in x=-1.

2)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ *, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x^2-1)}} \ , & se\ |x| < 1; \\ 0, & se\ |x| \geq 1; \end{cases}$$

Studiamo la funzione per $-1 < x < 1$ (in tutti gli altri punti coincide con l'asse x)-

$$f(x) = e^{\frac{1}{(x^2-1)}} \qquad (\text{per} \quad -1 < x < 1).$$

Nell'intervallo di studio la funzione è continua e derivabile ed è sempre positiva. Abbiamo già visto i limiti nel punto precedente. Abbiamo già notato che la funzione è pari.

Se x=0 risulta $f(x) = \frac{1}{e} \cong 0.34$; se y=0 $f(x) = mai$.

Derivata prima:

$f'(x) = -\frac{2x\,e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2} \geq 0 \ \ se \ \ x < 0$; la funzione è crescente se $-1 < x < 0$ e decrescente se $0 < x < 1$; x=0 è punto di minimo relativo (ed anche assoluto), con ordinata $\frac{1}{e} \cong 0.34$.

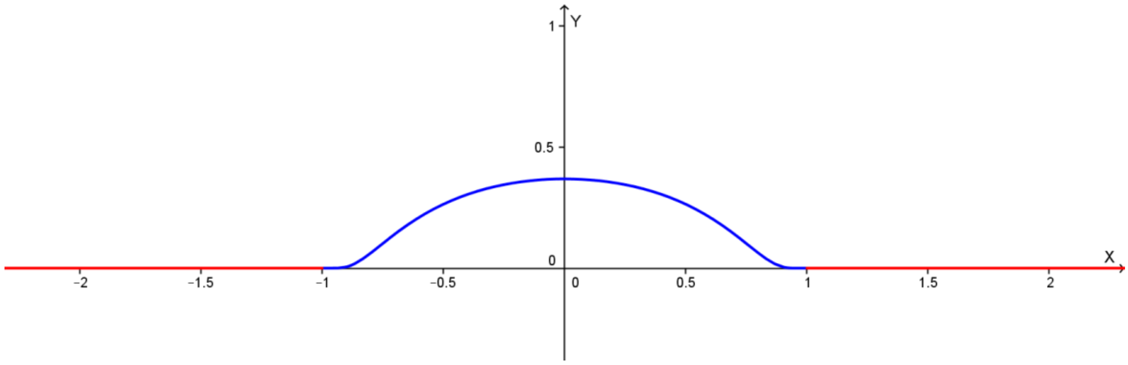
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{6x^4\boldsymbol{e}^{\frac{1}{x^2-1}} - 2\boldsymbol{e}^{\frac{1}{x^2-1}}}{x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1} = \frac{(6x^4 - 2)}{(x^2-1)^4} \cdot \boldsymbol{e}^{\frac{1}{x^2-1}} \geq 0 \ \ se \ \ 3x^4 \geq 1\,,$$

$$x \leq -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \ \ vel \ \ x \geq \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $-1 < x < -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} < x < 1$, e verso il basso se $-\frac{1}{\sqrt[4]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; si hanno due flessi per $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, con ordinata $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = e^{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$.

Il grafico completo della funzione è il seguente:



3)

Si scriva l'equazione della normale a γ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il punto di ascissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ha ordinata $y = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{\frac{1}{2}-1}} = e^{-2}$

Cerchiamo il coefficiente della tangente nel punto di ascissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$f'(x) = -\frac{2x\, \boldsymbol{e}^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2}, \qquad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{4}} \cdot e^{-2} = -\frac{4\sqrt{2}}{e^2}$$

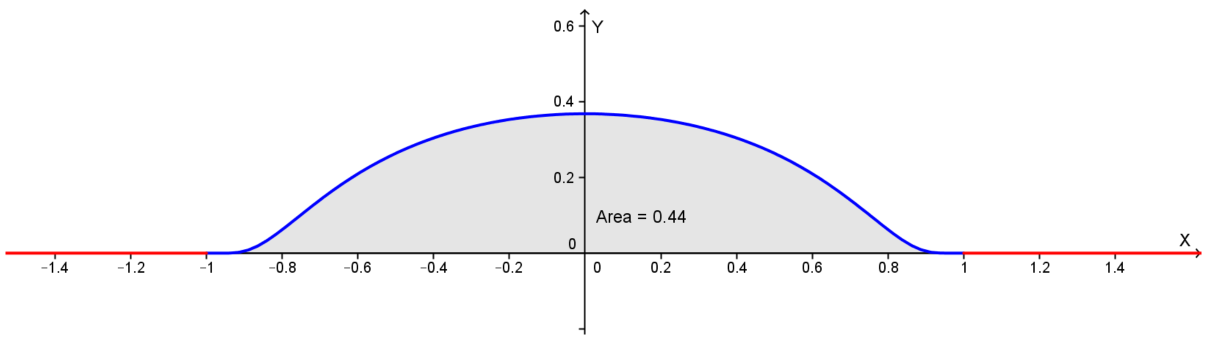
Il coefficiente angolare della normale è quindi:

$m = \frac{e^2}{4\sqrt{2}}$. La normale ha equazione: $y - e^{-2} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $y = \frac{e^2}{4\sqrt{2}}\, x - \frac{e^2}{8} + e^{-2}$.

4)

Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dall'asse delle x.

Rappresentiamo graficamente la superficie indicata:



L'area richiesta è data da:

$$Area = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\, dx \quad dove \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x^2-1)}}, & se\ |x| < 1; \\ 0, & se\ |x| \geq 1; \end{cases}$$

Calcoliamo con il metodo del trapezi l'integrale:

$$I = \int_{0}^{1} f(x)\, dx$$

Ricordiamo la formula dei trapezi:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{(x^2-1)}}$ e l'intervallo [0;1]; dividiamo l'intervallo in n=5 parti.

$$\int_0^1 f(x)dx \cong h\left[\frac{f(x_0)+f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0 + h = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$

$$\int_0^1 f(x)dx \cong 0.2\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)\right] =$$

$$= 0.2\left[\frac{e^{-1}+0}{2} + e^{\frac{1}{0.2^2-1}} + e^{\frac{1}{0.4^2-1}} + e^{\frac{1}{0.6^2-1}} + e^{\frac{1}{0.8^2-1}}\right] = 0.2 \cdot 1.1127 \cong 0.22$$

Quindi:

$$Area = 2\int_0^1 f(x)\,dx \ \ \cong 0.44\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria