

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 dei 10 quesiti del questionario.

Problema 1

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , si trattino le seguenti questioni:

1. Si costruisca il grafico γ della funzione $f(x) = 2(2-x)\sqrt{x^2-1}$
2. Si determini il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x , dalla superficie piana, finita, delimitata da γ e dall'asse x .
3. La retta $x = 2$ secca l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$ nei punti A e B . Si inscriba nel segmento iperbolico di base AB il rettangolo di area massima. A tal fine, si indichi con x l'ascissa dei vertici del generico rettangolo, inscritto nel segmento iperbolico, appartenenti all'iperbole e si utilizzi la curva γ .
4. Si calcoli il volume del solido che ha per base il segmento iperbolico prima considerato e tale che, tagliato con piani paralleli ad AB , dia tutte sezioni esagonali regolari.

Problema 2

Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } |x| \geq 1 \end{cases}$

1. Si dica se questa funzione è continua nei punti in cui $|x| = 1$.
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) .
3. Si scriva l'equazione della normale a γ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dall'asse delle x .

Questionario

1. Fra le piramidi quadrangolari regolari di data area laterale s , si determini quella di volume massimo.
2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{\log \operatorname{sen} x}{\log \operatorname{tg} x}$, quando x tende a 0.
3. Si provi se per la funzione $f(x) = |x+1| - 2x$, nell'intervallo $[-2,3]$, sono verificate le condizioni previste per la validità del teorema di Lagrange e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
4. Si determini il campo di esistenza della funzione $y = (x^2 + 3x)^{\sqrt{-2-x}}$
5. Siano dati un triangolo equilatero, il cerchio in esso inscritto e il triangolo equilatero inscritto nel cerchio. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo maggiore: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al triangolo minore.
6. Alla prova orale di un concorso sono stati ammessi 9 maschi e 7 femmine. Sappiamo che saranno assunte 5 persone. Qual è la probabilità che siano assunti 2 maschi e 3 femmine?
7. Si dimostri che l'equazione $\log x + x = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
8. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva: $f(x) = \int_1^x te^t dt$
9. Il toro è il solido di rotazione, ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio r di un giro completo attorno ad un asse, che abbia dal centro del cerchio generatore una distanza $a > r$. Si calcolino l'area e il volume del toro.
10. Un segmento AB di lunghezza costante a scorre coi suoi estremi sopra due rette ortogonali fisse x , y . Si dimostri che un punto P qualsiasi del segmento descrive una ellisse avente gli assi sopra x , y . Che cosa succede se P è il punto medio di AB ?