

ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione suppletiva 2009

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

(AMERICA LATINA)¹

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

L'ellisse Σ ha equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

- Si determinino le coordinate dei vertici e dei fuochi, le lunghezze degli assi e l'eccentricità.
- Si determini il rettangolo di area massima inscritto in Σ .
- Sia $y > 0$. Detto $P(x, y)$ un punto di Σ , si esprima in funzione di x la somma $f(x)$ delle coordinate di P . Si studi $f(x)$ e se ne tracci il grafico.
- Si calcoli l'area della regione R delimitata dal grafico di f , dall'asse x , dalle rette $x = 0$ e $x = 2$.

Problema 2

Nel piano Oxy è assegnata la circonferenza di centro O e raggio 1.

- Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a C nei suoi punti di ascissa $1/2$.
- Sia $P \in C$ a coordinate non negative; Q l'intersezione della tangente a C in P con l'asse x e N l'intersezione della retta OP con la retta $y = 2$. Si determini P in modo che risulti minima l'area del triangolo PMN . **PQM.**
- Sia $P \in C$ tale che $\widehat{POA} = \pi/6$ con $A(1, 0)$. Il settore circolare POA è la base di un solido che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di tale solido.

Questionario

- Provare che, per $n > 0$, vale

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

- Si enunci il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e se ne illustrino il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescita o decrescenza delle funzioni.
- Si dimostri, nel modo che si preferisce, che la media geometrica di due numeri positivi a e b non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

- Fra tutti i coni inscritti in una data sfera, trovare quello di volume massimo.

¹ Testo tratto da http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.pdf

5. Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$$

6. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = e^x - x^e.$$

Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = e$.

7. Quante diagonali ha un poligono di 2009 lati?

8. La regione R del primo quadrante delimitata dal grafico di

$$y = 3e^{-x}$$

e dalla retta $x = \ln 3$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S .