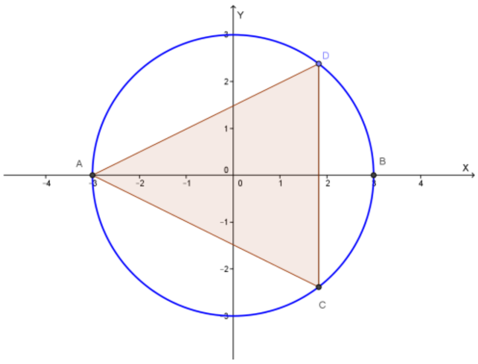
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2009 – PROBLEMA 1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza $\mathcal{C}$ con centro nell'origine O e raggio r=3.

a)

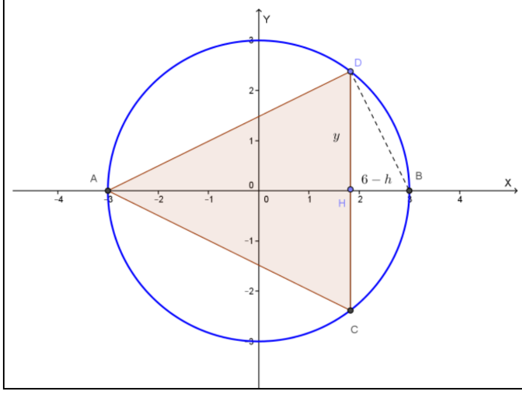
Si tracci una corda CD perpendicolare al diametro AB con A(-3;0) e B(3;0) . Si trovino le coordinate dei punti C e D di $\mathcal{C}$ affinché l'area del triangolo ACD sia massima.



Per una nota proprietà (fra tutti i triangoli inscritti in una circonferenza quello di area massima è equilatero) il segmento CD è il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza; la sua lunghezza è quindi $\mathrm{R}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Ricordando che l'altezza del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è $\frac{3}{2}\mathrm{R}$, possiamo dire che l'ascissa di C e D è $\frac{\mathrm{R}}{2} = \frac{3}{2}$: Cerchiamo le ascisse di C e D; la circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = 9$. Con $x = \frac{3}{2}$ otteniamo:

$y^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$, $y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Quindi: $C = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $D = \left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dimostrazione diretta.



Indichiamo con h l'altezza AH del triangolo (isoscele) ACD relativa alla base CD ($0 \leq h \leq 6$) e consideriamo il triangolo ABD rettangolo in D; per il secondo teorema di Euclide abbiamo:

$DH^2 = h(6-h)$, $DH = \sqrt{h(6-h)}$. Si ha quindi:

$$Area(ABD) = \frac{1}{2}CD \cdot AH = DH \cdot AH = \sqrt{h(6-h)} \cdot h$$

Tale area è massima se lo è il suo quadrato z:

$$z = h^3(6-h)\,, \qquad 0 \leq h \leq 6$$

Metodo analitico:

$z' = 18h^2 - 4h \geq 0 \quad se \quad 9 - 2h \geq 0, \;\; h \leq \dfrac{9}{2}$

Quindi z è crescente da 0 a $\frac{9}{2}$ e decrescente da $\frac{9}{2}$ a 6: è massima per $h = \frac{9}{2}$; segue che l'ascissa di C e D vale $\frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$. Ce D sono quelli trovato nella discussione precedente.

Metodo elementare:

$z = h^3(6-h) = (h)^3(6-h)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (6); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti:

$\frac{h}{3} = \frac{6-h}{1}, \;\; h = 18 - 3h, \;\; h = \frac{9}{2}$ …. Come trovato precedentemente.

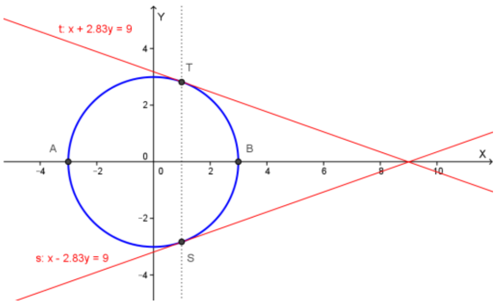
b)

Si scrivano le equazioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti d'ascissa x= 1.

La circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = 9$.

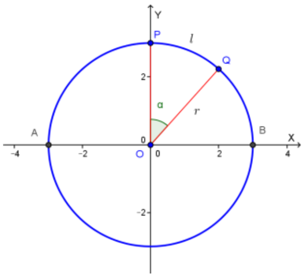
Per $x = 1$ otteniamo $y = \pm 2\sqrt{2}$; i punti richiesti sono quindi *S(1;$-2\sqrt{2}$) e T(1;$2\sqrt{2}$).*

Il metodo più veloce per scrivere le equazioni delle tangenti in un punto è quello dello "sdoppiamento": $x_0 x + y_0 y = 9$, quindi:
tangente in S: $\mathrm{x} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{y} = 9$; tangente in T: $\mathrm{x} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{y} = 9$



c)

Si calcoli, con l'aiuto di una calcolatrice, l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo $P\hat{O}Q$, con $P(0;3)$ e $Q(2;\sqrt{5})$.



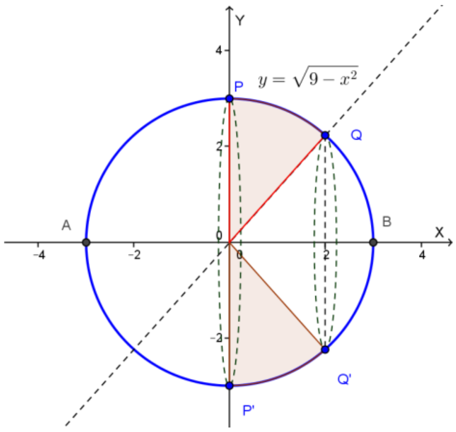
Risulta: $x_Q = r\, sen(\alpha), \;\; sen(\alpha) = \frac{2}{3}$, $\alpha = arcsen\left(\frac{2}{3}\right) \cong 41.810°$
Quindi: $P\hat{O}Q = arcsen\left(\frac{2}{3}\right) \cong 41° + (0.81 \cdot 60)' = 41° + 48.6'$

$$P\hat{O}Q \cong 41°49'$$

d)

Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione del settore circolare POQ attorno all'asse x.

L'arco PQ ha equazione $y = \sqrt{9 - x^2}$ e la retta OQ $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$.



Il volume richiesto si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left[9 - x^2 - \frac{5}{4}x^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left[9 - \frac{9}{4}x^2 \right] dx =$$

$$= \pi \left[9x - \frac{3}{4}x^3 \right]_0^2 = \pi(18 - 6) = (12\,\pi)\, u^3$$

Pertanto il volume del solido è $(12\,\pi)\, u^3$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria