Scuole italiane all'estero (Americhe) 2009 – PROBLEMA 2

1)

Si trovi l'espressione generale di un polinomio $P(x)$ di 4° grado tale che P(-2) = P(2) = 0 e $P(x) \geq 0 \;\; per\; ogni\; x \in R$.

Il più generale polinomio di quarto grado ha equazione:

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$P(2) = 0$: $\;16a + 8b + 4c + 2d + e = 0, \quad P(-2) = 0$: $\;16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$

Sommando membro a membro abbiamo: $32a + 8c + 2e = 0, \;\; 16a + 4c + e = 0$ e sostituendo in P(-2)=0 otteniamo: $-8b - 2d = 0, \;\; d = -4b$, quindi:

$d = -4b, \quad e = -16a - 4c$; il polinomio assume quindi la forma:

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 4bx - 16a - 4c = a(x^4 - 16) + bx(x^2 - 4) + c(x^2 - 4) =$

$= (x^2 - 4)[a(x^2 + 4) + bx + c)] = (x^2 - 4)(ax^2 + bx + 4a + c) \geq 0 \;\; per\; ogni\; x\; se$

$ax^2 + bx + 4a + c \geq 0$ quando è $x^2 - 4 \geq 0$ cioè se $ax^2 + bx + 4a + c \geq 0$ per

$x \leq -2 \;\;\; vel\; x \geq 2$. Deve quindi essere nullo $ax^2 + bx + 4a + c$ per x=2 e per x=-2:

Se a=2: $4a + 2b + 4a + c = 0, \;\; 8a + 2b + c = 0.$
Se a=-2: $4a - 2b + 4a + c = 0, \;\; 8a - 2b + c = 0.$
Sommando membro a membro: $8a + c = 0, c = -8a$
Sottraendo membro a membro: $4b = 0, b = 0$
Quindi $ax^2 + bx + 4a + c$ diventa: $ax^2 - 4a$ e deve essere $ax^2 - 4a \geq 0$ per $x \leq -2 \;\;\; vel\; x \geq 2$. Quindi occorre che sia a>0.
Il polinomio che soddisfa le richieste è quindi del tipo:
$P(x) = ax^4 - 8ax^2 + 16a = a(x^2 - 4)^2, \qquad con \quad a > 0$

2)

Sia $P(x) = (x^2 - 4)^2$. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy si rappresenti l'andamento di $P(x)$, determinandone in particolare i valori massimi e minimi e i flessi.

Si tratta di una funzione razionale intera, quindi è definita su tutto R; inoltre è pari e non è mai negativa; inoltre si annulla per x=-2 e x=2; i punti $m_1 = (-2; 0)$ ed $m_2 = (2; 0)$ sono quindi minimi assoluti.

I limiti al più e meno infinito sono uguali a più infinito. E' sufficiente studiare la derivata prima e la derivata seconda per completare il grafico.

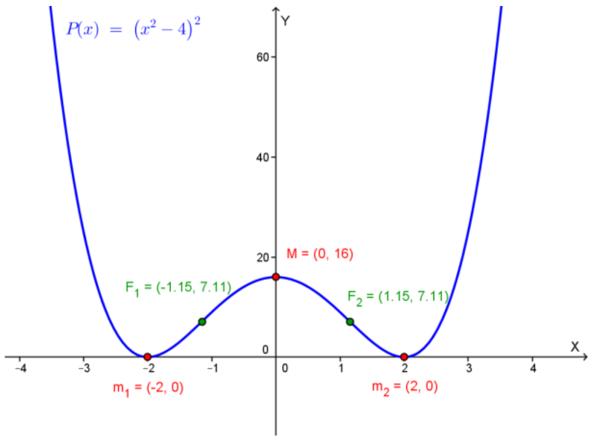
$P'(x) = 2(x^2 - 4)(2x) \geq 0 \quad se \quad x(x-2)(x+2) \geq 0: \ -2 \leq x \leq 0 \ \ e \ \ x \geq 2$: la funzione è quindi crescente per $-2 < x < 0 \ \ e \ \ x > 2$ e decrescente per $x < -2 \ \ e \ \ 0 < x < 2$. Quindi x=-2 e x=2 sono punti di minimo relativo (e assoluti) e x=0 (con ordinata 16) è punto di massimo relativo.

Cerchiamo i flessi:

$P''(x) = 4(3x^2 - 4) \geq 0 \quad per \quad x^2 \geq 4/3: \ x \leq -\sqrt{\frac{4}{3}}, x \geq \sqrt{\frac{4}{3}}$. Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $x < -\sqrt{\frac{4}{3}}, x > \sqrt{\frac{4}{3}}$ e verso il basso se $-\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \sqrt{\frac{4}{3}}$. Ne consegue che $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ sono punti di flesso, con ordinata: $P\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \left(\frac{4}{3} - 4\right)^2 = \frac{64}{9}$.

I flessi hanno coordinate: $F_1 = \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}; \frac{64}{9}\right), F_2 = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}; \frac{64}{9}\right)$.

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

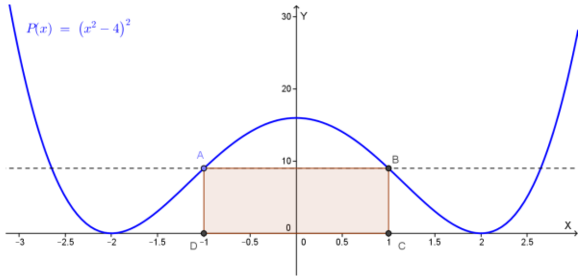
Si determini l'area della regione piana finita R compresa tra il grafico di $P(x)$ e l'asse x.

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = 2\int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = 2\int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16)dx = 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_0^2 = \frac{512}{15} \cong 34.13\ u^2$$

4)

Si inscriva in R un rettangolo, con uno dei lati sull'asse x. Come va scelto tale rettangolo affinché esso abbia area massima? Come va scelto tale rettangolo affinché, ruotandolo di un mezzo giro attorno all'asse y, si ottenga un cilindro di volume massimo?



Sia C il vertice del rettangolo sul semiasse positivo delle x e poniamo $C=(x;0), x\geq 0$
Risulta $B=(x;\ (x^2-4)^2)$. L'area del rettangolo è quindi:

$Area(ABCD) = 2x_C \cdot y_B = 2x(x^2-4)^2, \quad 0 \leq x \leq 2$

Metodo analitico

L'area è massima se lo è: $f(x) = \ x(x^2-4)^2,\ 0 \leq x \leq 2$. Trattandosi di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato essa (per il teorema di Weierstrass) ammette massimo e minimo assoluti; tali valori vengono assunti agli estremi dell'intervallo, nei punti a derivata nulla e negli eventuali punti di non derivabilità. Nel nostro caso agli estremi dell'intervallo la funzione si annulla. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = (x^2-4)^2 + x[2(x^2-4)(2x)] = (x^2-4\,)(x^2-4+4x^2) = 0\ se\ x = \pm 2, x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

Per x=2 la funzione si annulla (per tale valore abbiamo il minimo dell'area), quindi il massimo si ha per $x=\sqrt{\frac{4}{5}}$.

Metodo elementare

$x(x^2-4)^2 = (x^2)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)^2 = (x^2)^{\frac{1}{2}}(4-x^2)^2$; trattandosi del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (4), il massimo si ha quando le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4-x^2}{2},\ 4x^2 = 4-x^2,\ x^2 = \frac{4}{5},\ \ x = \sqrt{\frac{4}{5}}\ .$$

Dobbiamo ora cercare il rettangolo che, ruotando di mezzo giro intorno all'asse y, genera il cilindro di volume massimo.

Il volume di tale cilindro è: $V = \pi R^2 h = \pi(x_c)^2(y_B) = \pi x^2(x^2-4)^2$. Tale volume è massimo se lo è $x^2(x^2-4)^2$.

Metodo elementare

$x^2(x^2-4)^2 = (x^2)^1(4-x^2)^2$; trattandosi del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (4), il massimo si ha quando le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{x^2}{1} = \frac{4-x^2}{2}, \quad 2x^2 = 4-x^2, \quad x^2 = \frac{4}{3}, \quad x = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Metodo analitico

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $y = f(x) = x^2(x^2-4)^2, con \quad 0 \leq x \leq 2$.

La funzione, razionale intera, è continua e derivabile in un intervallo chiuso e limitato quindi, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti, che sono da ricercare fra i valori agli estremi dell'intervallo ed i punti stazionari (punti a derivata nulla).

Agli stremi la funzione assume i valori: $f(0) = f(2) = 0$.
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = 2x(x^2-4)^2 + x^2[2(x^2-4)2x] = 2x(x^2-4)(x^2-4+2x^2) = 2x(x^2-4)(3x^2-4)$$

Tale derivata si annulla per: $x = 0, x = \pm 2, \; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$. Siccome risulta:

$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}-4\right)^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{64}{9} > 0$, il massimo si ha per $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$, come già trovato.

Con la collaborazione di Angela Santamaria