Scuole italiane all'estero (Americhe) 2009 – Quesiti

QUESITO 1

Si dimostri che l'equazione: $x^{19} + 19x + 11 = 0$ *ha una sola radice compresa fra -1 e 0.*

Consideriamo la funzione di equazione: $f(x) = x^{19} + 19x + 11$. Si tratta di una funzione razionale intera di grado dispari, quindi ammette almeno uno zero (i limiti al più infinito e al meno infinito sono rispettivamente più infinito e meno infinito). Risulta poi:

$$f(-1) = -9 < 0, \quad f(0) = 11 > 0$$

Quindi per il teorema degli zeri la funzione si annulla almeno una volta fra -1 e zero.
Calcoliamo la derivata prima:

$f'(x) = 198 + 19 > 0 \ per\ ogni\ x$: la funzione è quindi sempre crescente, pertanto il suo grafico taglia l'asse x una sola volta.

Quanto detto equivale a dire che l'equazione $x^{19} + 19x + 11 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 (in realtà ha una sola radice su tutto R).

QUESITO 2

Si determini il periodo della funzione $f(x) = cos(7x)$.

Ricordiamo che se la funzione g(x) è periodica con periodo T, la funzione $g(kx)$ è periodica con periodo $T' = \frac{T}{k}$. Nel nostro caso la funzione $g(x) = cos(x)$ ha periodo $T = 2\pi$, la funzione $f(x) = g(7x)$ avrà periodo $\mathrm{T}' = \frac{2\pi}{7}$.

Il periodo della funzione $\mathrm{f(x) = cos(7x)}$ è $\frac{2\pi}{7}$.

Dimostrazione diretta.

Ricordiamo che una funzione f(x) si dice periodica di periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo tale che, per ogni x del suo dominio risulti, f(x)=f(x+T).
Nel caso proposto risulta:

$$f(x+T) = cos[7(x+T)] = cos(7x+7T) = cos(7x) \quad se \quad 7T = 2\pi, \qquad T = \frac{2}{7}\pi$$

QUESITO 3

Si scrivano le equazioni di almeno due funzioni razionali fratte che hanno un asintoto obliquo.

Ricordiamo che una funzione razionale fratta ha un asintoto obliquo se, e solo se, il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore. Esempi:

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x - 1}{x} : \ asintoto \ \ y = x + 1$$

$$g(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2} : \quad asintoto \ \ y = 2x + 3$$

Ricordiamo la seguente proprietà:

C.N.S. affinché la funzione f(x) abbia come asintoto la retta y=mx+q è che si possa esprimere nella forma f(x)=mx+q + g(x), con g(x) infinitesimo per x che tende all'infinito.

La dimostrazione di questa proprietà è sulla seguente pagina di matefilia.it:
http://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm

QUESITO 4

Si trovi il valore del parametro k in modo che la curva d'equazione $y = kx^3 - x + 4$ *abbia nel punto d'ascissa* $x = 1$ *la tangente orizzontale.*

Si tratta di trovare k in modo che si abbia: $y'(1) = 0$.
Risulta:

$$y' = 3kx^2 - 1, \ \ y'(1) = 3k - 1 = 0 \quad se \ \ k = \frac{1}{3}.$$

QUESITO 5

Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

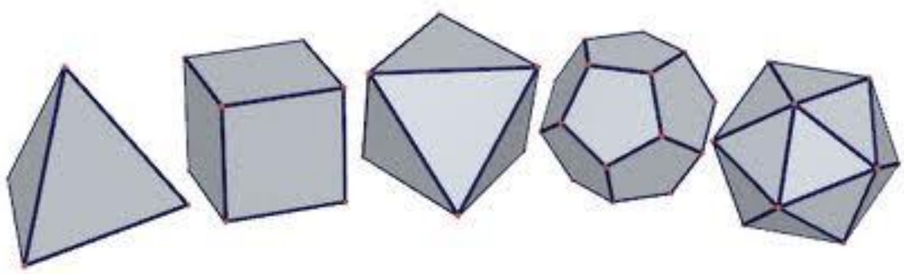
Un poliedro regolare è un poliedro le cui facce sono poligoni regolari congruenti e gli angoloidi sono tutti congruenti (come dire che in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce).

I poliedri regolari (detti solidi platonici) sono 5, e tra essi non ce ne sono a facce esagonali.

Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).
Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi **non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.**

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).
5.



QUESITO 6

Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?

Abbiamo a disposizione le cifre 2, 4, 6, 8. I numeri che possiamo scrivere sono pari alle permutazioni semplici di 4 oggetti:

$$P_4 = 4! = 24.$$

QUESITO 7

Si calcoli: $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos3x}{x^2}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cos3x)(1+cos3x)}{x^2(1+cos3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 3x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+cos3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}9\left(\frac{sen3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=9\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

Si è applicato il limite notevole $\lim_{f(x)\to 0}\frac{senf(x)}{f(x)}=1$.

QUESITO 8

Si risolva in R la seguente equazione: $e^{2x}+e^x=2$

Ponendo $e^x=t$ otteniamo:

$t^2+t-2=0,\ \ t=1\ e\ t=-2$

Se $t=1,\ \ e^x=1,\ \ x=0$

Se $t=-2,\ \ e^x=-2,\ impossibile.$

L'equazione data ha quindi la soluzione $x=0$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria