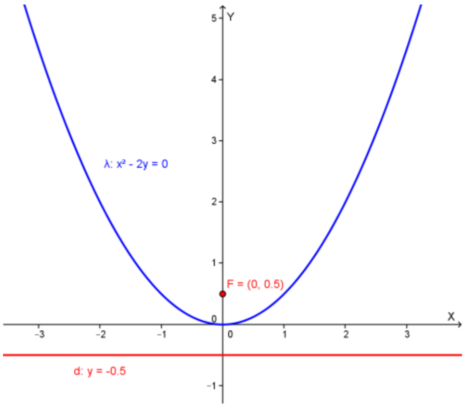
Scuole italiane all’estero (Calendario australe) 2009 – PROBLEMA 1

E’ assegnata la parabola λ d’equazione $x^2 - 2y = 0$.

1)

Si disegni λ. Si determini il fuoco e la direttrice illustrandone le rispettive proprietà.

Si tratta di una parabola con vertice in O, con asse l’asse y e con la concavità rivolta verso l’alto.



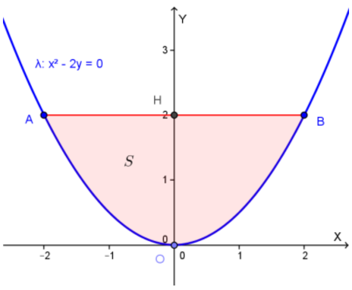
La parabola può essere scritta nella forma:

$y = \frac{1}{2}x^2$; $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right) = \left(0; \frac{1}{2}\right) = F$; direttrice: $y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}$

Il significato di fuoco e direttrice è insito nella definizione di parabola: dato un punto F, detto fuoco, ed una retta d, detta direttrice (con F non appartenente a d), si chiama parabola di fuoco F e direttrice d il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d.

2)

Siano A(-2; 2) e B(2; 2). Si calcoli l’area del segmento parabolico S di base AB.

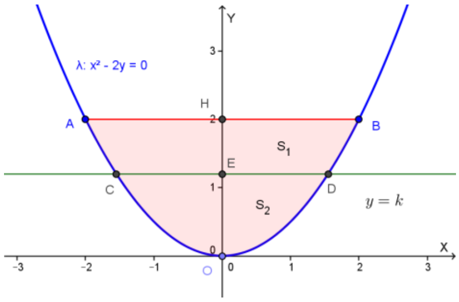


L’area del segmento parabolico si può calcolare velocemente utilizzando il teorema di Archimede:

$$Area(S) = \frac{2}{3} AB \cdot OH = \frac{16}{3}\ u^2$$

3)

Si determini la retta y=k che dimezza l'area di S.



Deve essere $Area(S_1) = Area(S_2) = \frac{1}{2}Area(S) = \frac{8}{3}$. Cerchiamo le intersezioni C e D fra la parabola e la retta y=k:

$$\begin{cases} y = k \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}, \quad x = \pm\sqrt{2k}\,, con\ k > 0$$

Calcoliamo l'area di S_2:

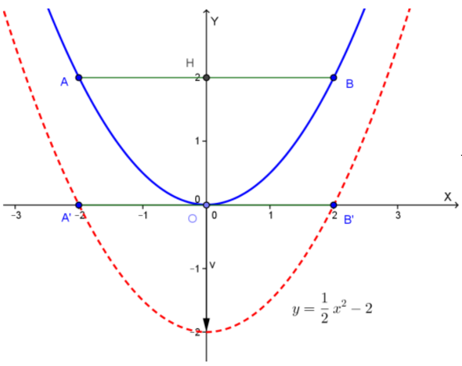
$$Area(S_2) = \frac{2}{3}CD \cdot EO = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2k}\right)k = \frac{4}{3}k\sqrt{2k} = \frac{8}{3}: \quad k\sqrt{2k} = 2, \quad 2k^3 = 4, \quad k = \sqrt[3]{2}$$

La retta che dimezza l'area di S ha equazione $y = 2$.

4)

Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di S attorno alla retta AB.

Effettuiamo una traslazione di assi che porti l'asse delle x nella retta AB. L'equazione della parabola diventa: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ (alzare l'asse delle x di 2 è come abbassare la parabola di 2):



Il volume richiesto si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)^2\right]dx = 2\pi\int_{0}^{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4\right]dx =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}\ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria