## Scuole italiane all'estero (America Latina 2009, Sessione suppletiva)

### PROBLEMA 1

*L'ellisse* $\Sigma$ *ha equazione* $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ .

***a)***

*Si determinino le coordinate dei vertici e dei fuochi, le lunghezze degli assi e l'eccentricità.*

Riduciamo l'ellisse alla forma canonica:

$x^2 + 4y^2 = 4,\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Essendo $a = 2\ e\ b = 1$ i vertici hanno coordinate:
$A = (-2; 0), B = (2; 0), C = (0; -1), D = (0; 1)$ e gli assi misurano: $2a = 4\ e\ 2b = 2$.

Per determinare le coordinate dei fuochi (che appartengono all'asse $x$ essendo $a > b$) cerchiamo la semidistanza focale:

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}\ ;\ \ F_1 = (-c; 0), F_2 = (c; 0); quindi$:

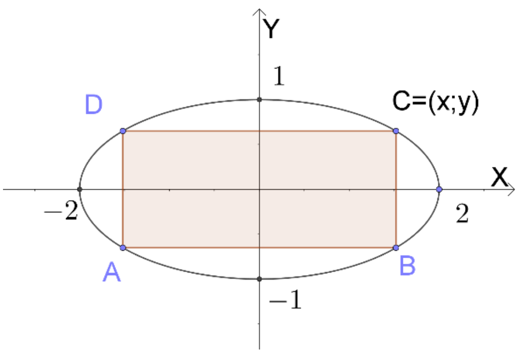
$F_1 = \left(-\sqrt{3}; 0\right), F_2 = \left(\sqrt{3}; 0\right)$

L'eccentricità è uguale al rapporto fra la semidistanza focale ed il semiasse maggiore; quindi, nel nostro caso: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
*(Ricordiamo che l'eccentricità di un'ellisse è compresa fra 0 (circonferenza) ed 1 (escluso).*

***b)***

*Si determini il rettangolo di area massima inscritto in* $\Sigma$*.*

Rappresentiamo graficamente l'ellisse ed il generico rettangolo inscritto in essa:




Indichiamo con C=(x; y) il vertice del generico rettangolo appartenente al primo quadrante, quindi $0 < x < 2\ e$ $0 < y < 1$. L'area del rettangolo è data da:

$$Area(ABCD) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2x \cdot 2y = 4xy$$

Con $x^2 + 4y^2 = 4$

L'area del rettangolo è massima se lo è $xy\ e\ quindi\ anche\ x^2y^2$,
Dalla relazione $x^2 + 4y^2 = 4$ otteniamo $x^2 = 4 - 4y^2$. Indicando con z l'area del rettangolo, risulta: $z = 4xy$ è massima se lo è $w = x^2\,y^2 = (4 - 4y^2)y^2$.

Dobbiamo quindi trovare il massimo della funzione $f(y) = (4-4y^2)y^2 = 4y^2 - 4y^4$ , $con\ 0 < y < 2$.
Si ha:
$f'(y) = 8y - 16y^3 \geq 0\ \ se\ \ y(1-2y^2) \geq 0,\ ossia, essendo\ y > 0,\ se\ \ 1-2y^2 \geq 0$, quindi se:

$y^2 \leq \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\ , ed\ essendo\ 0 < y < 2, risulta:$

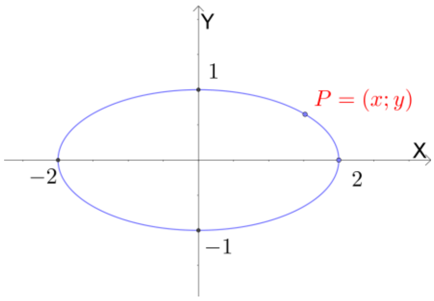
$f'(y) \geq 0\ \ per\ \ \ 0 < y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}:$ la funzione è quindi crescente $per\ \ \ 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e decrescente per $\frac{\sqrt{2}}{2} < y < 1:$ f(y). E quindi l'area del rettangolo è massima se $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e dalla relazione $x^2\ = 4 - 4y^2$
Otteniamo $x^2 = 4 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ ,\ perciò:\ \ x = \sqrt{2}$ .

Il rettangolo di area massima inscritto nell'ellisse è quindi quello il cui vertice C del primo quadrante ha coordinate $C = \left(\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Gli altri tre vertici, per questioni di simmetria, hanno coordinate: $A = \left(-\sqrt{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , $B = \left(\sqrt{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , $D = \left(-\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**N.B.** L'area del rettangolo massimo è: $Area(ABCD) = 4xy = 4(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\ u^2$

***c)***

*Sia $y > 0$. Detto $P(x;y)$ un punto di $\Sigma$, si esprima in funzione di $x$ la somma $f(x)$ delle coordinate dei punti di P. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico.*




Dall'equazione dell'ellise $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , con y positivo troviamo: $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ , quindi:

$f(x) = x + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = x + \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$. Dobbiamo quindi studiare la funzione di equazione:

$f(x) =\ x + \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

**Dominio**: $4 - x^2 > 0,\ poichè\ l'ordinatadi\ P\ è\ positiva,\ \ non\ può\ essere\ x = \pm 2$ , quindi

$-2 < x < 2$

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

Se x=0 allora y=1; se y=f(x)=0, quindi: $x + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = 0, \sqrt{4-x^2} = -2x$ ;

$\begin{cases} -2x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \ (implicita\ nella\ terza\ disequazione) \\ 4-x^2 = 4x^2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x \leq 0 \\ x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$ : $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Quindi il grafico della funzione interseca l'asse delle x nel punto do ascissa $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

**Segno della funzione:**

$f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \geq 0$ , $\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \geq -x$ , $\sqrt{4-x^2} \geq -2x$; dobbiamo risolvere due sistemi:

$1) \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ -2x < 0 \end{cases}$ $2) \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 4x^2 \end{cases}$ Quindi:

$1) \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases}$ : $0 < x \leq 2$ $(il\ 2\ va\ escluso\ per\ quanto\ detto\ sopra), perciò$: $0 < x < 2$

$2) \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 4x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 0 \\ 5x^2 \leq 4 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x \leq 0 \\ -\sqrt{\frac{4}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4}{5}} \end{cases}$ Quindi: $-\sqrt{\frac{4}{5}} \leq x \leq 0$

Risulta quindi $f(x) \geq 0\ \ se\ \ -\sqrt{\frac{4}{5}} \leq x < 2$ ed $f(x) < 0\ \ se -2 < x < -\sqrt{\frac{4}{5}}$.

**Limiti**

$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -2$ ; $\lim_{x \to (2)^-} f(x) = 2$

**Studio della derivata prima:**

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}; \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 1 - \frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2\sqrt{4-x^2}-x}{2\sqrt{4-x^2}} = f'(x)$$

$\frac{2\sqrt{4-x^2}-x}{2\sqrt{4-x^2}} \geq 0\ \ se\ \ 2\sqrt{4-x^2} - x \geq 0$; $\sqrt{4-x^2} \geq \frac{x}{2}$ , $1) \begin{cases} \frac{x}{2} < 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \cup 2) \begin{cases} \frac{x}{2} \geq 0 \\ 4-x^2 \geq \frac{x^2}{4} \end{cases}$

$1) \begin{cases} \frac{x}{2} < 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases}$; $1) \begin{cases} x < 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$ : $-2 \leq x < 0$

$2) \begin{cases} \frac{x}{2} \geq 0 \\ 4-x^2 \geq \frac{x^2}{4} \end{cases}$ ; $2) \begin{cases} x \geq 0 \\ 5x^2 \leq 16 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq \frac{16}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$; $0 \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$

Perciò $f'(x) \geq 0\ \ se\ \ -2 < x \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$ $(ricordiamo\ che\ x = 2\ non\ fa\ parte\ del\ dominio)$.

Quindi risulta: $f'(x) < 0\ \ se\ \ \frac{4}{\sqrt{5}} < x < 2$ (funzione decrescente) ed $f'(x) > 0\ \ se\ \ -2 < x < \frac{4}{\sqrt{5}}$

(funzione crescente): la funzione ha un massimo (assoluto) per $x = \frac{4}{\sqrt{5}} \cong 1.8$, con ordinata:

$y = x + \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{\frac{16}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} \cong 2.2.$

$M = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}; \sqrt{5}\right).$

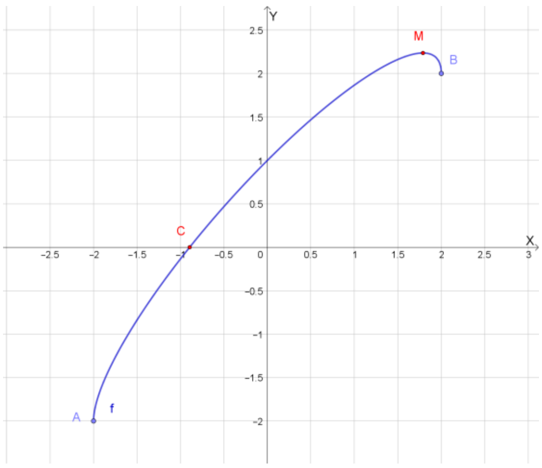
Essendo $f'(x) = \frac{2\sqrt{4-x^2}-x}{2\sqrt{4-x^2}}, il\ dominio\ di\ f'$ è $-2 < x < 2$. I limiti agli estremi di tale dominio sono rispettivamente $+\infty\ e\ -\infty$ , quindi il grafico di f agli estremi del dominio tende ad una tangente verticale.

**Studio della derivata seconda:**

Tralasciando i calcoli, si ottiene:
$\boldsymbol{f''(x) = -\frac{2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}}$ .

$Risulta\ f''(x) < 0\ per\ ogni\ x\ del\ dominio$:

$concavità\ sempre\ verso\ il\ basso, non\ ci\ sono\ flessi\ flessi$




(i punti A e B non fanno parte del grafico)

***d)***

*Si calcoli l'area della regione* $R$ *delimitata dal grafico di* $f$, *dall'asse* $x$, *dalle rette*
$x = 0\ e\ x = 2$.

Dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$Area = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}\right) dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\sqrt{4 - x^2}$:

Posto $x = 2\sin(t)\,, risulta:\ dx = 2\cos(t)\,dt, quindi$:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \left(\sqrt{4-4\sin^2 t}\right) 2\cos t\,dt = \int 2\left(\sqrt{1-\sin^2 t}\right) 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1+cos(2t)}{2}\,dt = 2\int (1+\cos(2t))\,dt = 2t + \frac{1}{2} sen(2t) + K$$

Da $x = 2\sin(t)$ ricaviamo $t = \arcsin\frac{x}{2}$, Inoltre: $sen(2t) = 2\,sen(t)\cos(t) = x\sqrt{1-sen^2 t} =$

$= x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$ (N.B. La funzione $sen(t)$ è invertibile in $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, quindi

$\cos(t) > 0, perciò \cos(\mathrm{t}) = +\sqrt{1-sen^2 t}$ ).

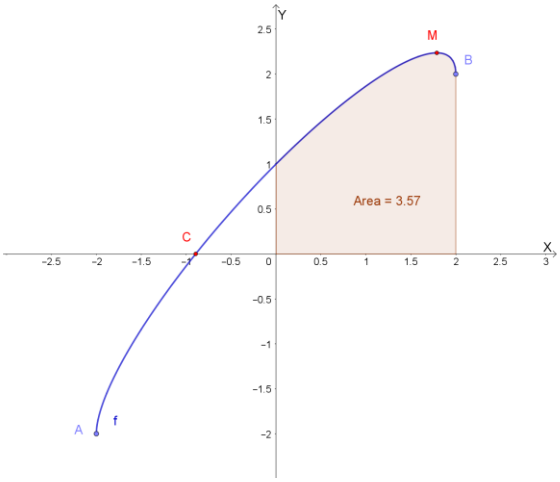
Pertanto:

$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + k$

Possiamo ora calcolare l'integrale che fornisce l'area richiesta:

$$Area = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\right]_0^2 =$$

$$= 2 + \arcsin(1) - (0) = \left(2+\frac{\pi}{2}\right) u^2 \cong 3.57\,u^2 = Area$$




**Osservazione**

Siccome A e B non fanno parte del grafico l'area si dovrebbe calcolare come:

$$\lim_{k\to 2^-} \int_0^k f(x)\,dx = \lim_{k\to 2^-} \left[\frac{1}{2}k^2 + \arcsin\frac{k}{2} + \frac{k}{4}\sqrt{4-k^2}\right]_0^2 = \lim_{k\to 2^-} [2 + arcsin(1) - 0] = \left(2+\frac{\pi}{2}\right) u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria