Scuole italiane all'estero (America Latina 2009, Sessione suppletiva)

PROBLEMA 2

Ne piano Oxy è assegnata la circonferenza C di centro O e raggio 1.

a)

Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a C nei suoi punti di ascissa $\frac{1}{2}$.

La circonferenza C ha equazioni: $x^2 + y^2 = 1$. Cerchiamo i punti ascissa $\frac{1}{2}$:

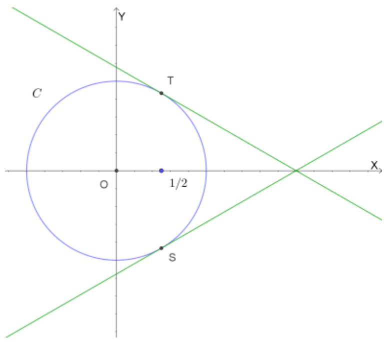
$\frac{1}{4} + y^2 = 1$, $y^2 = \frac{3}{4}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. I punti richiesti sono quindi: $S = \left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ e\ T = \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

Per scrivere le equazioni delle tangenti in S e T usiamo la formula di sdoppiamento:

$$x_o x + y_0 y = 1$$

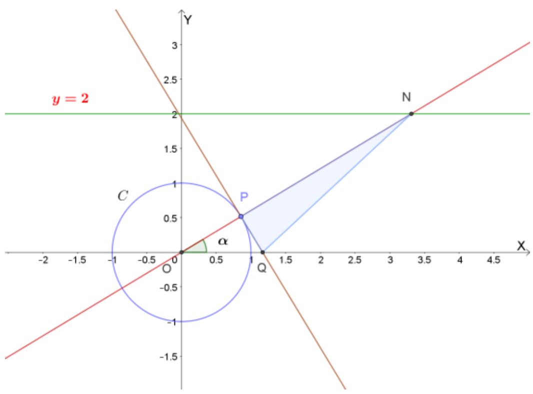
Tangente in S: $\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1,\ \ x - \sqrt{3}\,y = 2$

Tangente in T: $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1,\ \ x + \sqrt{3}\,y = 2$



b)

Sia $P\epsilon C$ *a coordinate non negative; Q l'intersezione della tangente a C in P con l'asse x e N l'intersezione della retta OP con la retta* $y = 2$. *Si determini P in modo che risulti minima l'area del triangolo PQN.*



Posto $P\hat{O}Q = \alpha\ \left(con\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\ ; \alpha = 0\ non\ accettabile\ perch\grave{e}\ non\ esisterebbe\ N)\right)$, $abbiamo$: $P = (\cos\alpha\,; sen\ \alpha)$, $notando\ che\ C$ è $la\ circonferenza\ goniometrica$.

La retta OP ha equazione: $y = (tg\ \alpha)\ x$; la sua intersezione N con la retta di equazione $y = 2$ ha quindi coordinate : $N = \left(\frac{2}{tg\ \alpha}; 2\right)$.

Dal triangolo OPQ, rettangolo in P, otteniamo: $\overline{OQ} = \frac{\overline{OP}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$; quindi: $Q = \left(\frac{1}{\cos\alpha}; 0\right)$

Cerchiamo ora i cateti PQ e PN.

$\overline{PQ} = \overline{OP}\ tg\ \alpha = tg\ \alpha$; $\overline{PN} = \overline{ON} - \overline{OP} = \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} - 1 = \frac{2}{sen\ \alpha} - 1$

Quindi:

$$Area(PQN) = \frac{\overline{PQ}\cdot\overline{PN}}{2} = \frac{1}{2}\,(tg\ \alpha)\left(\frac{2}{sen\ \alpha} - 1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{2 - sen\ \alpha}{sen\ \alpha}\right) = \frac{(2 - sen\ \alpha)}{2\ \cos\alpha}$$

Cerchiamo il minimo assoluto della funzione:

$$f(\alpha) = \frac{(2 - sen\ \alpha)}{2\ \cos\alpha},\quad con\ \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

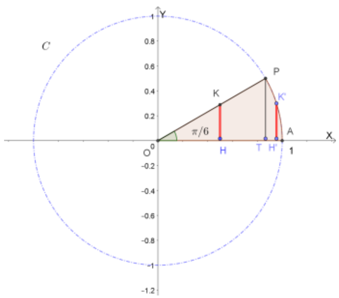
$$f' = \frac{1}{2}\,\frac{-\cos\alpha\,(\cos\alpha) + sen\ \alpha(2 - sen\ \alpha)}{\cos^2\alpha} \geq 0\quad se\quad -\cos\alpha\,(\cos\alpha) + sen\ \alpha(2 - sen\ \alpha) \geq 0;$$

$$-\cos^2\alpha + 2sen\ \alpha - sen^2\alpha \geq 0\ ;\ 2sen\ \alpha \geq 1\ ;\ sen\ \alpha \geq \frac{1}{2}:\ \ \frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

L'area è quindi crescente per : $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e decrescente per $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$: pertanto è minima per $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (dove la derivata si annulla). L'area minima vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c)

Sia $P \epsilon C$ tale che $P\hat{O}A = \frac{\pi}{6}$ $con\ A(1; 0)$. Il settore POA è la base di un solido che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di tale solido.



Il volume V del solido si ottiene sommando i seguenti volumi:

$V_1 = \int_0^{x_P} A(x)dx$, essendo A(x) l'area del quadrato di lato $HK = y_K$.

$V_2 = \int_{x_P}^{1} B(x)dx$, essendo B(x) l'area del quadrato di lato $H'K' = y_{K'}$.

Risulta $x_P = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e la retta OP ha equazione $y = \left(tg\,\frac{\pi}{6}\right)x = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x$, quindi: $y_K = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x$,

$pertanto$: $A(x) = \frac{1}{3}\ x^2$.

$$V_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} A(x)dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{3}\,x^2\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{9}\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}-0\right]=\frac{\sqrt{3}}{24}\,u^3=V_1$$

Per calcolare il secondo volume dobbiamo trovare l'ascissa di H', che fa parte della circonferenza di equazione $x^2+y^2=1,\ y'_{K'}=\sqrt{1-x^2}$ (ricordiamo che x è positiva). Quindi:

$B(x)=1-x^2$.

$$V_2=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} B(x)dx=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}=1-\frac{1}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}\right)u^3.$$

Il volume richiesto è quindi:

$$V=V_1+V_2=\frac{\sqrt{3}}{24}+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{3}\,u^3\cong 0.089\,u^3=V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria