Scuole italiane all'estero (America Latina 2009, Sessione suppletiva)

Questionario

Quesito 1

Provare che, per n>0, vale: $n! \geq 2^{n-1}$.

Applichiamo il *Principio d'induzione*. Indicando con P(n) la proprietà da dimostrare, dimostriamola per n=1:
$1! \geq 2^0$, $1 \geq 1 :\ vero$

Supponiamo vera P(n), cioè supponiamo che valga $n! \geq 2^{n-1}$ e dimostriamo che vale P(n+1), cioè che $(n+1)! \geq 2^n$. Risulta:

$(n+1)! = n!\,(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1),\ \ perchè\ \ n! \geq 2^{n-1}$

$2^{n-1}(n+1) \geq 2^{n-1}(2) = 2^n,\ \ perchè\ \ n+1 \geq 2$

Quindi si ha: $(n+1)! \geq 2^n$. La proprietà è quindi vera per ogni n>0.

Quesito 2

Si enunci il teorema del valor medio o di Lagrange *e se ne illustrino il legame con il teorema di* Rolle *e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle funzioni.*

Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione y=f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo (a; b) allora esiste almeno un punto c in (a; b) tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\,.$$

N.B.

Osserviamo che i punti $A = \big(a; f(a)\big)\ \ e\ \ B = (b; f(b))$ sono gli estremi del grafico della funzione di equazione y=f(x); inoltre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta AB ed $f'(c)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto di ascissa c.
Il significato geometrico del teorema di Lagrange è quindi il seguente:

nelle ipotesi del teorema esiste almeno un punto interno all'arco di curva AB in cui la tangente è parallela alla congiungente i punti A e B.

Legame con il teorema di Rolle.

Il teorema di Rolle può essere considerato un corollario del teorema di Lagrange. In esso si aggiunge l'ipotesi che f(a)=f(b) e si ha come tesi: esiste almeno un punto c in (a; b) tale che: $f'(c) = 0$. Dal teorema di Lagrange si ha infatti:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0.$$

Il significato geometrico diventa ora: esiste almeno un punto C del grafico della funzione tra $A = \big(a; f(a)\big)\ e\ B = (b; f(b))$ a tangente orizzontale.

Implicazione del teorema di Lagrange nello studio di una funzione.

Come corollario del teorema di Lagrange si dimostra che se la derivata di una funzione è sempre positiva (negativa) nei punti interni di un intervallo chiuso e limitato [a; b], allora la funzione è crescente (decrescente) in tale intervallo.

Dimostrazione

Sia x un generico punto interno all'intervallo [a; b]. Applicando il Teorema di Lagrange all'intervallo [a; x], in cui sono chiaramente soddisfatte le ipotesi del teorema stesso, esisterà almeno un punto c interno all'intervallo [a; x] tale che:

$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Essendo x>a, si ha che:

se $f'(c) > 0, allora\ f(x) > f(a)$, perciò la funzione è crescente in [a; x], e data la genericità di x, ciò vuol dire che la funzione è crescente in [a; b].
In modo del tutto analogo si ha che, se se $f'(c) < 0, allora\ f(x) < f(a)$, perciò la funzione è decrescente in [a; x], e data la genericità di x, ciò vuol dire che la funzione è decrescente in [a; b].

Quesito 3

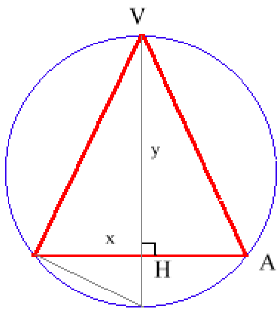
Si dimostri, nel modo che si preferisce, che la media geometrica di due numeri positivi a e b non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè che:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4ab \leq (a+b)^2 \quad \Rightarrow 0 \leq (a-b)^2$: vero per ogni a e b

Quesito 4

Fra tutti i coni inscritti in una data sfera, trovare quello di volume massimo.



Indichiamo con y l'altezza del cono e con x il suo raggio di base. Per il secondo teorema di Euclide (detto R il raggio della sfera) si ha: $x^2 = y(2R - y)$. Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Tale volume è massimo se lo è $z = x^2 y = y^2(2R - y)$

Risoluzione elementare.

$y^2(2R - y) = (y)^2(2R - y)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (2R); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$\frac{y}{2} = \frac{2R-y}{1}$, $y = \frac{4}{3}R$ $(altezza\ del\ cono\ uguale\ ai\ \frac{4}{3}\ del\ raggio\ della\ sfera)$.
Il raggio r=x della circonferenza di base del cono si calcola da $x^2 = y(2R - y)$. Quindi:
$x^2 = \frac{4}{3}R\left(2R - \frac{4}{3}R\right) = \frac{4}{3}R\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{8}{9}R^2 = x^2; \quad x = \frac{2}{3}R\sqrt{2}$.

Il cono di volume massimo inscritto in una sfera di dato raggio è quello la cui altezza è i 4/3 del raggio della sfera.

Risoluzione analitica.

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $z = y^2(2R - y), \quad con\ 0 \le y \le 2R$
Risulta:

$z' = 4Ry - 3y^2 \ge 0 \quad se \quad 3y^2 - 4Ry \le 0: \;\; 0 \le y \le \frac{4}{3}R$

La funzione è quindi crescente se $0 < y < \frac{4}{3}R$ e decrescente se $\frac{4}{3}R < y < 2R$.

Per $y = \frac{4}{3}R$ z (e quindi anche il volume del cono) assume il valore massimo.

Il volume massimo è: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}R^2\right)\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3 = Volume\ massimo$

Quesito 5

Si calcoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Quesito 6

Sia f la funzione definita da $f(x)=e^x-x^e$.
Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=e$.

***Dominio** di f: $x\geq 0$.*

$f(x)=e^x-x^e=e^x-e\,x^{e-1}$. Quindi:

$f'(e)=e^e-e\,e^{e-1}=e^e-e^e=0$

$f''(x)=D(e^x-e\,x^{e-1}.)=e^x-e(e-1)e^{e-2}=e^x-(e-1)e^{e-1}=f''(x).$

$f''(e)=e^e-(e-1)e^{e-1}=e^e-e^e+e^{e-1}=e^{e-1}>0.$

Quesito 7

Quante sono le diagonali di un poligono di 2009 lati?

Consideriamo gli n vertici del poligono. Da ogni vertice escono n-3 diagonali (posso congiungere tale vertice con tutti gli altri tranne che con i vertici adiacenti e con se stesso. Siccome i vertici sono n e che, per esempio, la diagonale AC coincide con la diagonale CA, avremo:

$\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali.
Per n=2009 il numero delle diagonali è $\frac{2009(2009-3)}{2}=2015027.$

Notiamo che il numero delle diagonali si può ottenere anche col calcolo combinatorio.

Il numero DI TUTTE le coppie di vertici di un poligono di n lati non sono altro che le combinazioni di n oggetti (i vertici) a due a due, quindi: $C_{n,2}=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Per ottenere il numero delle diagonali a tale numero bisogna sottrarre il numero delle coppie formate da vertici consecutivi, che sono n: per esempio per $n=4$ abbiamo le seguenti coppie di vertici consecutivi:
1-2, 2-3, 3-4, 4-1.

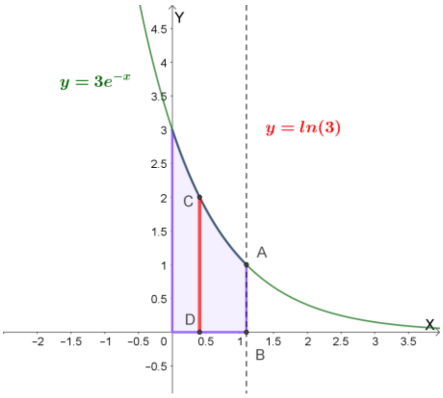
Quindi:

$$numero\ diagonali=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Quesito 8

La regione R del primo quadrante delimitata dal grafico di $y = 3\,e^{-x}$ e dalla retta $x = \ln 3$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x sono tutti quadrati. Si calcoli il volume di S.

Il grafico della funzione si ottiene facilmente dal grafico di $y = e^{-x}$ con una dilatazione verticale di fattore 3.



Dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$Area = \int_0^{\ln(3)} A(x)\,dx$, essendo A(x) l'area della sezione: $A(x) = CD^2 = (3\,e^{-x})^2 = 9\,e^{-2x}$

Quindi:

$$Area = \int_0^{\ln(3)} 9\,e^{-2x}\,dx = -\frac{9}{2}\int_0^{\ln(3)} -2e^{-2x}\,dx = -\frac{9}{2}\left[e^{(-2x)}\right]_0^{\ln(3)} = -\frac{9}{2}\left[e^{-2ln3} - 1\right] =$$

$$= -\frac{9}{2}\left[\left(e^{ln3}\right)^{-2} - 1\right] = -\frac{9}{2}(3^{-2} - 1) = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = -\frac{9}{2}\left(-\frac{8}{9}\right) = 4\,u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria