Scuole italiane all'estero (Europa) 2009 – PROBLEMA 1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza $\mathcal{C}$ d'equazione $x^2+y^2=25$.

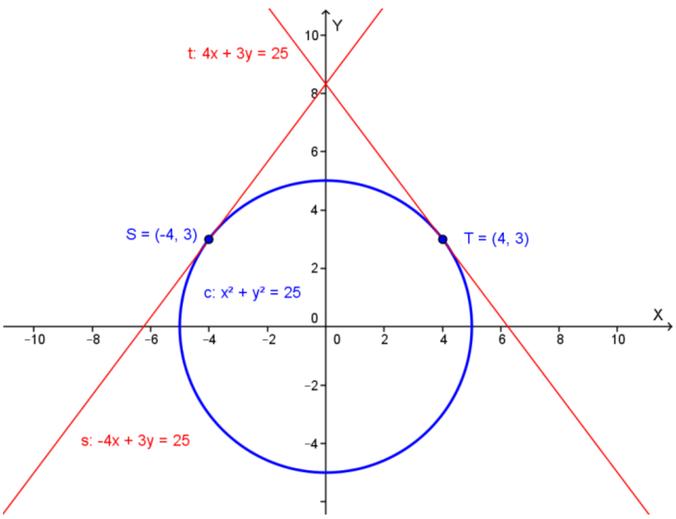
a)

Si scrivano le equazioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti d'ordinata $y=3$.

La circonferenza ha centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio 5.
Per $y=3$ otteniamo $x=\pm 4$; i punti richiesti sono quindi T(4;3) e S(-4;3).

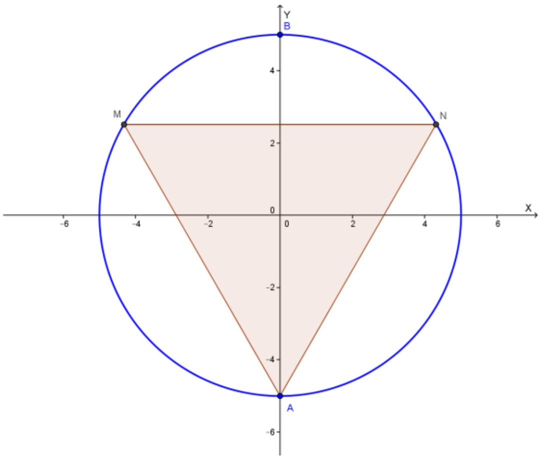
Il metodo più veloce per scrivere le equazioni delle tangenti in un punto è quello dello "sdoppiamento": $x_0x+y_0y=25$, quindi:

tangente in T: $4x+3y=25$; tangente in S: $-4x+3y=25$



b)

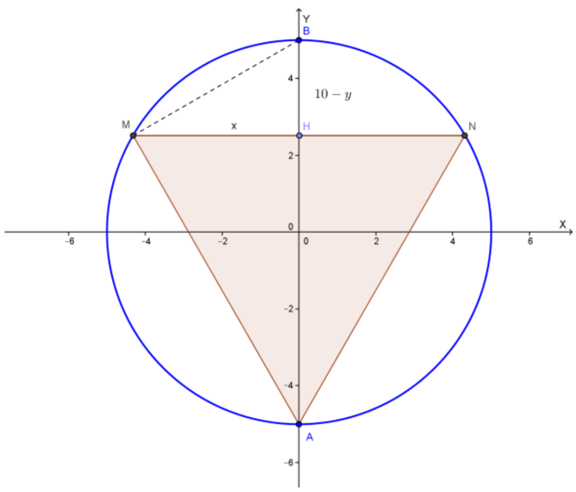
Si tracci una corda MN perpendicolare al diametro AB con A(0;-5) e B(0;5) . Si trovino le coordinate dei punti M e N di $\mathcal{C}$ in modo che l'area del triangolo AMN sia massima.



Per una nota proprietà (*fra tutti i triangoli inscritti in una circonferenza quello di area massima è equilatero*) il segmento MN è il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza; la sua lunghezza è quindi $R\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Ricordando che l'altezza del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è $\frac{3}{2}R$, possiamo dire che l'ordinata di M ed N è $\frac{R}{2} = \frac{5}{2}$: Cerchiamo le ascisse di M ed N: da $x^2 + y^2 = 25$ otteniamo:

$x^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$, $x = \pm\sqrt{\frac{75}{4}} = \pm\frac{5}{2}\sqrt{5}$. Quindi: $M = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right)$, $N = \left(\frac{5}{2}\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right)$.

Dimostrazione diretta.



Indichiamo con y l'altezza AH del triangolo AMN $(0 \le y \le 10)$ e consideriamo il triangolo ABM rettangolo in M; per il secondo teorema di Euclide abbiamo:

$MH^2 = y(10-y),\ MH = \sqrt{y(10-y)}$. Si ha quindi:

$Area(AMN) = \frac{1}{2}MN \cdot AH = MH \cdot AH = \sqrt{y(10-y)} \cdot y$

Tale area è massima se lo è il suo quadrato z:

$z = y^3(10-y)\,, \qquad 0 \leq y \leq 10$

Metodo analitico:

$z' = 30y^2 - 4y^3 \geq 0 \;\; se \;\; 15 - 2y \geq 0,\;\; y \leq \frac{15}{2}$

Quindi z è crescente da 0 a $\frac{15}{2}$ e decrescente da $\frac{15}{2}$ a 10: è massima per $y = \frac{15}{2}$; segue che l'ordinata di M ed N vale $\frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$. M ed N sono quelli trovato nella discussione precedente.

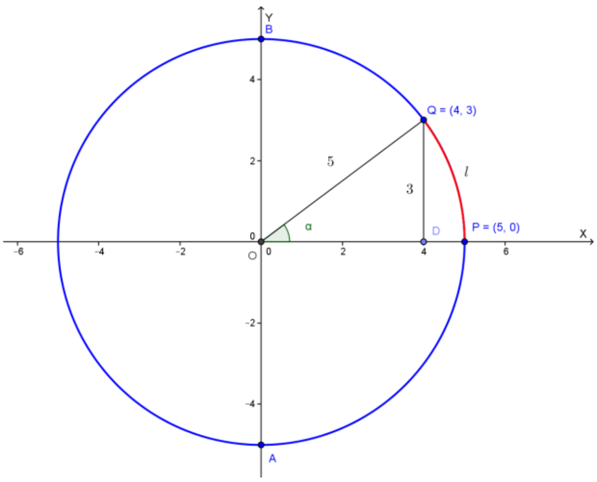
Metodo elementare:

$z = y^3(10-y) = (y)^3(10-y)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (10); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti:

$\frac{y}{3} = \frac{10-y}{1},\;\; y = 30 - 3y,\;\; y = \frac{15}{2}$ …. Come trovato precedentemente.

c)

Con l'aiuto di una calcolatrice, si calcoli la lunghezza dell'arco tra i punti P(5;0) e Q(4;3) di $\mathcal{C}$.



Dal triangolo rettangolo OQD, indicato con α l'angolo (in radianti) DOQ, otteniamo:

$$QD = 5sen\alpha, \qquad sen\alpha = \frac{3}{5}\,, \alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right) \cong 0.644$$

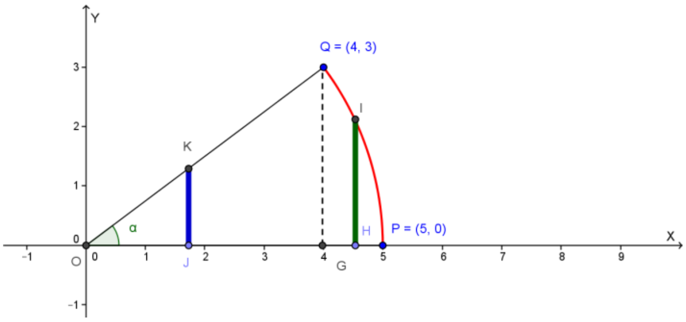
In dicando con l la lunghezza dell'arco (rettificato) PQ e con r il raggio della circonferenza, in base alla definizione di radiante risulta:

$$\frac{l}{r} = \alpha, l = \alpha r = 5 \cdot arcsen\left(\frac{3}{5}\right) \cong 5 \cdot 0.644 \cong 3.2$$

La lunghezza dell'arco PQ è circa 3.2.

d)

Il settore circolare POQ è la base di un solido $\mathcal{W}$ che tagliato con piani perpendicolari all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di $\mathcal{W}$.



Siano g(x) l'equazione della retta OQ ed f(x) l'equazione dell'arco PQ. Risulta:

$$g(x) = \frac{3}{4}x \quad ed \quad f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Il volume di $\mathcal{W}$ è dato quindi da:

$$V(\mathcal{W}) = \int_0^4 g^2(x)dx + \int_4^5 f^2(x)dx = \int_0^4 \frac{9}{16}x^2dx + \int_4^5 (25 - x^2)dx =$$
$$= \left[\frac{3}{16}x^3\right]_0^4 + \left[25x - \frac{1}{3}x^3\right]_4^5 = 12 + \left[125 - \frac{125}{3} - \left(100 - \frac{64}{3}\right)\right] = 12 + \frac{14}{3} = \frac{50}{3}$$

Pertanto il volume di $\mathcal{W}$ è $\left(\frac{50}{3}\right)$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria