Scuole italiane all’estero (Europa) 2009 – PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d’equazioni: $y^2 = 2ax \quad e \quad x^2 = ay, \quad con\ a > 0$.

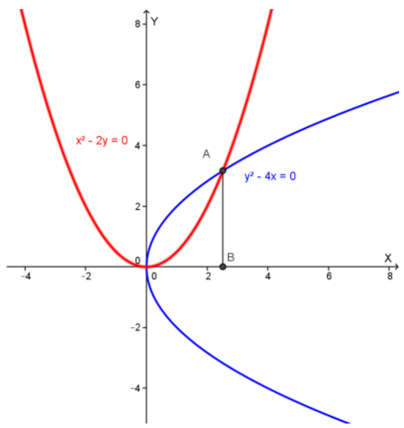
a)

Si disegnino le due parabole e si denoti con A il loro punto d’intersezione diverso dall’origine O.

La prima è una parabola con vertice nell’origine, asse di simmetria coincidente con l’asse x e concavità rivolta verso destra; la seconda ha sempre vertice in O, asse coincidente con l’asse y e concavità verso l’alto. Cerchiamo le coordinate di A:

$$\begin{cases} y^2 = 2ax \\ x^2 = ay \end{cases}; \quad \frac{x^4}{a^2} = 2ax\,; \quad x = 0 \quad e \quad x^3 = 2a^3, da\ cui: \ x = a\sqrt[3]{2}\,, y = \frac{x^2}{a} = a\sqrt[3]{4}$$

$A = \left(a\sqrt[3]{2}\,;\ a\sqrt[3]{4}\right)$



b)

Sia B la proiezione ortogonale di A sull’asse x . Si dica se il segmento OB risolve il problema della duplicazione del cubo di spigolo a. Posto a=2 e non disponendo di una calcolatrice come si può procedere per avere l’approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ *a meno di* 10^{-1}*?*

Risulta $OB = x_A = a\sqrt[3]{2}$. Il cubo di spigolo a ha volume a^3, il cubo di volume doppio ha volume $2a^3$, quindi il suo spigolo è $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$ che è proprio la lunghezza di OB: OB risolve quindi il problema della duplicazione del cubo. Ciò vuol dire costruire lo spigolo del cubo che ha volume doppio del cubo di spigolo a: basta tracciare le due parabole in oggetto e trovare il segmento OB.

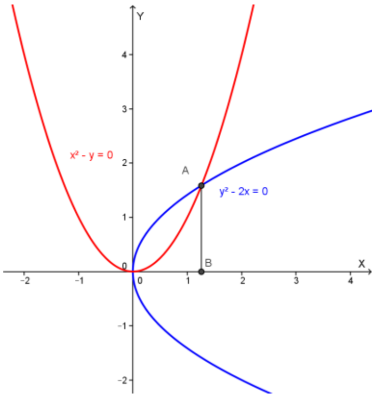
Nota storica sul problema della duplicazione del cubo

Come è noto, il problema della duplicazione del cubo non è risolubile con riga e compasso, non è cioè possibile, con l'uso della sola riga e del solo compasso costruire un segmento la cui lunghezza sia uguale allo spigolo del cubo di volume doppio di un cubo di spigolo dato (praticamente è come dire che non è possibile costruire con riga e compasso un segmento la cui lunghezza sia $\sqrt[3]{2}$).
Il problema proposto riproduce (in termini moderni) la soluzione geometrica data da **Menecmo**.

Poniamo ora a=2; si chiede di trovare un'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ a meno di 10^{-1} senza utilizzare una calcolatrice; il valore richiesto equivale alla metà di OB; quindi possiamo trovare OB e calcolare la sua meta. Per avere $OB = \sqrt[3]{2}$ conviene usare le parabole di partenza con a=1. Abbiamo quindi:

$y^2 = 2x \quad e \quad x^2 = y$; l'ascissa di A (e di B), per quanto detto precedentemente, vale $\sqrt[3]{2}$.

Rappresentiamo le due parabole nello stesso sistema di riferimento:



Osserviamo per x=1 in $y^2 = 2x$ si ha $y = \sqrt{2}$ mentre in $x^2 = y$ si ha y=1: quindi $x_B > 1$
Se x=2 in $y^2 = 2x$ si ha $y = 2$ mentre in $x^2 = y$ si ha y=2: quindi $x_B < 1$; quindi:

1<x<2

Procediamo nella tabulazione riducendo sempre di più l'ampiezza dell'intervallo.

Se x=1.5 in $y^2 = 2x$ si ha $y = \sqrt{3} < 2$ mentre in $x^2 = y$ si ha y=2.25: quindi $1 < x_B < 1.5$

Se x=1.4 in $y^2 = 2x$ si ha $y = \sqrt{2.8} < 1.7$ $(perchè\ 1.7^2 = 2.89)$ mentre in $x^2 = y$ si ha y=1.96: quindi $1 < x_B < 1.4$.

Se x=1.3 in $y^2 = 2x$ si ha $y = \sqrt{2.6} < 1.6$ $(perchè\ 1.6^2 = 2.56)$ mentre in $x^2 = y$ si ha y=1.69: quindi $1 < x_B < 1.3$.

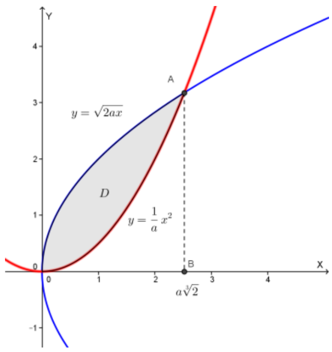
Se x=1.2 in $y^2 = 2x$ si ha $y = \sqrt{2.4} < 1.5$ $(perchè\ 1.5^2 = 2.25)$ mentre in $x^2 = y$ si ha y=1.44: quindi $1.2 < x_B < 1.3$.

Quindi $\sqrt[3]{2} = 1.2$ approssimata per difetto a meno di 10^{-1}.

N.B.
Osserviamo che $\sqrt[3]{2}$ è la radice dell'equazione $x^3 - 2 = 0$, quindi, si può applicare uno dei metodi dell'analisi numerica (per esempio bisezione o tangenti) utilizzando la funzione $f(x) = x^3 - 2$. Ci è sembrato più coerente al contesto utilizzare il metodo grafico (che comunque equivale, in un certo senso, al metodo di bisezione).

c)

Sia $\mathcal{D}$ la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini l'area di $\mathcal{D}$.



L'arco OA della parabola $y^2 = 2ax$ ha equazione $y = \sqrt{2ax}$ e l'arco OA della parabola $x^2 = ay$ ha equazione $y = \frac{1}{a}x^2$.
L'area richiesta è:

$$Area(\mathcal{D}) = \int_0^{a\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt{2ax} - \frac{1}{a}x^2\right) dx = \left[\sqrt{2a}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3a}x^3\right)\right]_0^{a\sqrt[3]{2}}$$

$$= \sqrt{2a}\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{2a^3} - \frac{1}{3a}2a^3 =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2 = Area(\mathcal{D})$$

d)

Si calcoli il volume del solido generato da $\mathcal{D}$ in una rotazione completa attorno alla all'asse y.

Esprimiamo i due archi di parabola OA nella forma: $x = \frac{1}{2a}y^2 \quad e \quad x = \sqrt{ay}$.

Il volume di $\mathcal{D}$è dato da:

$$V(\mathcal{D}) = \pi \int_0^{y_A} \left[\left(\sqrt{ay}\right)^2 - \left(\frac{1}{2a}y^2\right)^2\right] dy = \pi \int_0^{a\sqrt[3]{4}} \left[ay - \frac{1}{4a^2}y^4\right] dy = \pi \left[\frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{20a^2}y^5\right]_0^{a\sqrt[3]{4}}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}a \cdot a^2\sqrt[3]{16} - \frac{1}{20a^2} \cdot a^5\sqrt[3]{4^5}\right) = \pi\left(a^3\sqrt[3]{2} - \frac{1}{5}a^3 2\sqrt[3]{2}\right) = \frac{3}{5}a^3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \pi = V(\mathcal{D})$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria