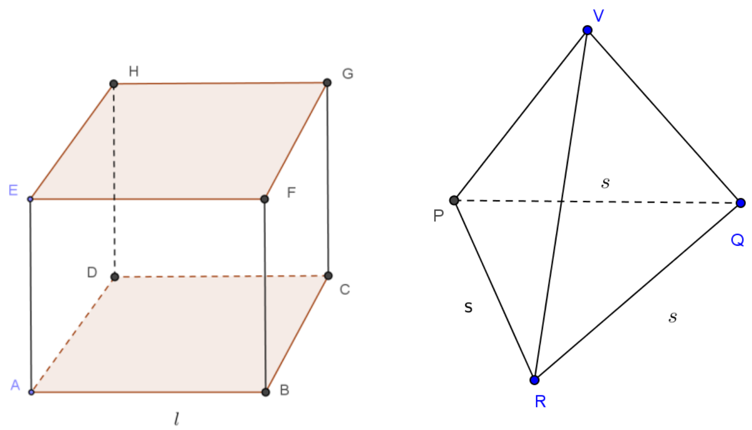
Scuole italiane all'estero (Europa) 2009 – Quesiti

QUESITO 1

Un tetraedro regolare e un cubo hanno superfici equivalenti. Si determini il rapporto dei rispettivi spigoli.



Detto l lo spigolo del cubo, la sua superficie è: $S(cubo) = 6l^2$.

Detto s lo spigolo del tetraedro regolare, la sua superficie è:

$S(tetraedro) = 4S(PQR) = 4\left(s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Quindi risulta:

$$6l^2 = \sqrt{3}\, s^2 \;\; , \;\; \frac{s}{l} = \sqrt{\frac{6}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{12}$$

Il rapporto fra lo spigolo di un tetraedro regolare e quello del cubo con la stessa superficie totale è $\sqrt[4]{12}$.

QUESITO 2

Si dimostri che l'equazione: $x^{11} + 11x + 5 = 0$ *ha una sola radice compresa fra -1 e 0.*

Consideriamo la funzione di equazione: $f(x) = x^{11} + 11x + 5$. Si tratta di una funzione razionale intera di grado dispari, quindi ammette almeno uno zero (i limiti al più infinito e al meno infinito sono rispettivamente più infinito e meno infinito). Risulta poi:

$$f(-1) = -7 < 0, \quad f(0) = 5 > 0$$

Quindi per il teorema degli zeri la funzione si annulla almeno una volta fra -1 e zero. Calcoliamo la derivata prima:

$f'(x) = 11x^{10} + 11 > 0 \ per\ ogni\ x$: la funzione è quindi sempre crescente, pertanto il suo grafico taglia l'asse x una sola volta.

Quanto detto equivale a dire che l'equazione $x^{11} + 11x + 5 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 (in realtà ha una sola radice su tutto R).

QUESITO 3

Si determini il campo di esistenza della funzione: $f: x \to ln(-2x^2 + 4x + 6)$.

Deve essere: $-2x^2 + 4x + 6 > 0$, $x^2 - 2x - 3 < 0$, $-1 < x < 3$.

Il campo di esistenza della funzione è quindi $-1 < x < 3$.

QUESITO 4

Qual è il periodo della funzione $f(x) = \cos(3x + 1)$*? Si dia ragione della risposta.*

Ricordiamo che se la funzione g(x) è periodica con periodo T, la funzione g(kx) è periodica con periodo $T' = \frac{T}{k}$. Nel nostro caso la funzione $g(x) = \cos(x + 1)$ ha periodo $T = 2\pi$, la funzione $f(x) = g(3x)$ avrà periodo $T' = \frac{2\pi}{3}$.

il periodo della funzione $\mathrm{f(x)} = \cos(3\mathrm{x} + 1)$ è $\frac{2\pi}{3}$.

Dimostrazione diretta.

Ricordiamo che una funzione f(x) si dice periodica di periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo tale che, per ogni x del suo dominio risulti, f(x)=f(x+T).
Nel caso proposto risulta:

$$f(x + T) = cos[3(x + T) + 1] = \cos(3x + 3T + 1) = \cos(3x + 1)\ se\ 3T = 2\pi, T = \frac{2}{3}\pi$$

QUESITO 5

Si sa che una grandezza fisica dipende da un'altra secondo una legge del tipo $y = kx^{\alpha}$ *dove* k *e* α *sono costanti incognite. Una misura simultanea di x e y, eseguita in due diverse situazioni, ha dato i risultati riportati nella tabella seguente:*

x	2	3
y	6.4	14.4

Si calcolino k *e* α.

In base ai dati forniti deve essere:

$$\begin{cases} 6.4 = k \cdot 2^{\alpha} \\ 14.4 = k \cdot 3^{\alpha} \end{cases}, \quad dividendo\ membro\ a\ membro: \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} = \frac{6.4}{14.4} = \frac{4}{9}, \alpha = 2$$

Da $6.4 = k \cdot 2^{\alpha}$ otteniamo: $6.4 = k \cdot 4, \quad k = 1.6$.

Risulta perciò: $\alpha = 2$ e $k = 1.6$.

QUESITO 6

Si calcoli: $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Ma risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-cosx)(1+cosx)}{x^2(1+cosx)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+cosx} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{senx}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Si è applicato il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$.

QUESITO 7

Dati due punti A e B distanti tra loro $4\ dm$, *si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a* $2\ cm^2$.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxyz con A=O e B=(0; 4; 0) e sia C=(x; y; z) il generico punto dello spazio; . Deve essere:

$BC^2 = AB + AC^2$, quindi: $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + z^2$, $-8y + 16 = 16, y = 0$

Quindi C deve appartenere al piano xz.

Deve poi essere: $Area(ABC) = 2\ cm^2 = 0.02\ dm^2, quindi: \frac{1}{2} AB \cdot AC = 0.02,$

$AB \cdot AC = 0.0.04$, $2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0.02, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0.01$

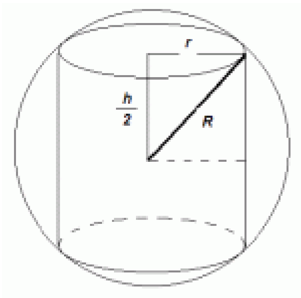
Il punto C appartiene quindi alla circonferenza di equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0.01 \end{cases}$$

Il luogo è la circonferenza appartenente al piano perpendicolare in A alla retta AB, con centro in A e raggio 1/10.

QUESITO 8

Si determini il cilindro di massimo volume che si può inscrivere in una sfera di $60\ cm$ *di raggio. Quale è la capacità di tale cilindro, espressa in litri?*



Indichiamo con R il raggio della sfera, con r il raggio del cilindro e con h l'altezza del cilindro.

Il volume del cilindro è dato da: $V(cilindro) = \pi r^2 h$. Ma risulta:

$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ quindi: $V(cilindro) = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = f(h)$, $con\ 0 \le h \le 2R$

Tale volume è massimo se lo è $y = \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$; calcoliamo la derivata prima:

$$y' = R^2 - \frac{h^2}{4} + h\left(-\frac{1}{2}h\right) = -\frac{3}{4}h^2 + R^2 \ge 0\ \ se\ \ h^2 \le \frac{4}{3}R^2\ \ ,\ -R\sqrt{\frac{4}{3}} \le h \le R\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Quindi, con le limitazioni su h, la funzione è crescente se $0 < h < R\sqrt{\frac{4}{3}}$ e decrescente se $R\sqrt{\frac{4}{3}} < h < 2R$: la funzione ha quindi un massimo (assoluto) per $h = R\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}R\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$

Per tale valore di h si ha: $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}R^2 = \frac{2R^2}{3}$, $r = \frac{R\sqrt{6}}{3} = 20\sqrt{6}$

Il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R=60 cm è quello di altezza $\frac{2}{3}R\sqrt{3} = 40\sqrt{3}\ cm$ e raggio di base $\frac{R\sqrt{6}}{3} = 20\sqrt{6}\ cm.$

Il volume massimo del cilindro è:

$$V_{\max=} = \pi r^2 h = \pi\left(20\sqrt{6}\right)^2 \cdot \left(40\sqrt{3}\right)cm^3 \cong 522374.22\ \ cm^3 \cong 522.374\ dm^3 \cong 522\ litri$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria