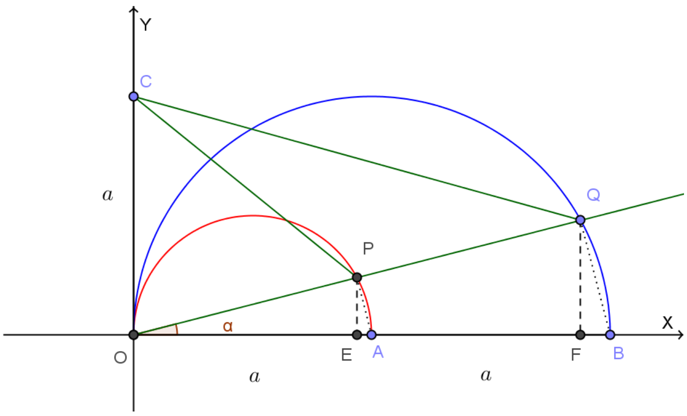
ORDINAMENTO 2009 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data a. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento OC = a. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.



1)

Si calcoli il rapporto:

$$(1) \qquad \frac{CP^2 + PQ^2 + QC^2}{2a^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x = tg\alpha$, controllando che risulta

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1} \; .$$

L'angolo α ha le seguenti limitazioni: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Fissato un sistema di riferimento con origine in O, asse delle ascisse coincidente con la retta OB e asse delle orinate con OC, abbiamo:

$OP = a\, cos\alpha$, $PE = OP\, sen\alpha = a\, cos\alpha\, sen\alpha$, $OE = OP\, cos\alpha = a\, cos^2\alpha$

$OQ = 2a\, cos\alpha$, $QF = OQ\, sen\alpha = 2a\, cos\alpha\, sen\alpha$, $OF = OQ\, cos\alpha = 2a\, cos^2\alpha$

Pertanto:

$C = (0; a)$, $P = (a\,cos^2\alpha\,; a\,cos\alpha\,sen\alpha)$, $Q = (2a\,cos^2\alpha\,;\,2a\,cos\alpha\,sen\alpha)$

Risulta:

$$CP^2 = a^2\,cos^4\alpha + (a\,cos\alpha\,sen\alpha - a)^2 = a^2\,cos^4\alpha + a^2\cos^2\alpha\;sen^2\alpha - 2a^2\,cos\alpha\,sen\alpha + \\ +a^2$$

$$PQ^2 = a^2\,cos^4\alpha + a^2\cos^2\alpha\;sen^2\alpha = a^2\cos^2\alpha(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) = a^2\cos^2\alpha$$

$$QC^2 = 4a^2\cos^4\alpha + (2a\,cos\alpha\,sen\alpha - a)^2 = \\ = 4a^2\cos^4\alpha + 4a^2\cos^2\alpha\;sen^2\alpha - 4a^2\,cos\alpha\,sen\alpha + a^2$$

Quindi:

$$CP^2 + PQ^2 + QC^2 = a^2\,cos^4\alpha + a^2\cos^2\alpha\;sen^2\alpha - 2a^2\,cos\alpha\,sen\alpha + a^2 + a^2\cos^2\alpha + \\ +4a^2\cos^4\alpha + 4a^2\cos^2\alpha\;sen^2\alpha - 4a^2\,cos\alpha\,sen\alpha + a^2 = \\ = 5\,a^2\,cos^4\alpha + 5a^2\cos^2\alpha\;sen^2\alpha - 6a^2\,cos\alpha\,sen\alpha + a^2\cos^2\alpha + 2a^2 =$$

$$= 5a^2\cos^2\alpha(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) - 6a^2\,cos\alpha\,sen\alpha + a^2\cos^2\alpha + 2a^2 =$$

$$= 6a^2\cos^2\alpha - 6a^2\,cos\alpha\,sen\alpha + 2a^2$$

$$\frac{CP^2 + PQ^2 + QC^2}{2a^2} = 3\;cos^2\alpha - 3cos\alpha\,sen\alpha + 1 =$$

$$= 3\cos^2\alpha - 3cos\alpha\,sen\alpha + sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha - 3cos\alpha\,sen\alpha + sen^2\alpha =$$

$$= 4\cdot\frac{1+cos2\alpha}{2} - \frac{3}{2}\cdot sen2\alpha + \frac{1-cos2\alpha}{2} = 2 + 2cos2\alpha - \frac{3}{2}\cdot sen2\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2\alpha =$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{3}{2}cos2\alpha - \frac{3}{2}\cdot sen2\alpha = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} =$$

$$= \frac{5+5tg^2\alpha+3-3tg^2\alpha-6tg\alpha}{2(1+tg^2\alpha)} = \frac{2tg^2\alpha-6tg\alpha+8}{2(1+tg^2\alpha)} = \frac{tg^2\alpha-3tg\alpha+4}{1+tg^2\alpha} = \frac{x^2-3x+4}{x^2+1} = f(x)$$

2)

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f\,(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$$

Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Essendo $f(-x) = \frac{x^2+3x+4}{x^2+1}$ diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$ la funzione non né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 4$.
Se $y = 0$, $x^2 - 3x + 4 = 0$, mai $(\Delta < 0)$

Segno della funzione:

$y > 0 \;\; se \;\; x^2 - 3x + 4 = 0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x$

Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1} = 1 \;\; : \quad y = 1 \;\; asintoto\ orizzontale$$

Non ci sono asintoti verticali né obliqui.

Eventuali intersezioni con l'asintoto orizzontale:

$\frac{x^2-3x+4}{x^2+1} = 1 \quad x = 1$: A=(1;1)

Derivata prima:

$f'(x) = \frac{3x^2-6x-3}{(x^2+1)^2} \geq 0$ se $3x^2 - 6x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 1 \geq 0$

$x \leq 1 - \sqrt{2} \quad or \quad x \geq \sqrt{2} + 1$

Pertanto la funzione è crescente se $x < 1 - \sqrt{2} \quad or \quad x > \sqrt{2} + 1$ e decrescente se $1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} + 1$;
$x = 1 - \sqrt{2}$ punto di massimo relativo (e assoluto), $f(1 - \sqrt{2}) \cong 4.6$
$x = 1 + \sqrt{2}$ punto di minimo relativo (e assoluto), $f(1 + \sqrt{2}) \cong 0.4$

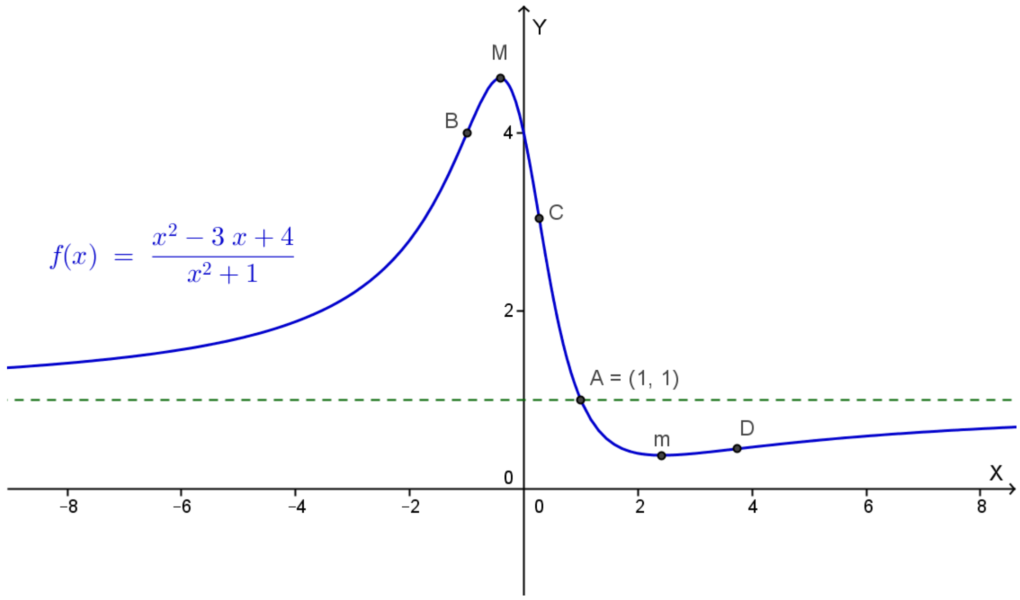
Derivata seconda:

$f''(x) = \frac{-6x^3+18x^2+18x-6}{(x^2+1)^3} = \frac{-6(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} \geq 0$ se $(x + 1)(x^2 - 4x + 1) \leq 0$:

$x \leq -1 \quad or \quad 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$: in tali intervalli il grafico volge la concavità verso l'alto; avremo quindi tre flessi:

$x = -1\ ,\quad f(-1) = 4:$ B
$x = 2-\sqrt{3}\ ,\quad f(2-\sqrt{3}) \cong 3:$ C
$x = 2+\sqrt{3}\ ,\quad f(2+\sqrt{3}) \cong 0.5\ :$ D

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

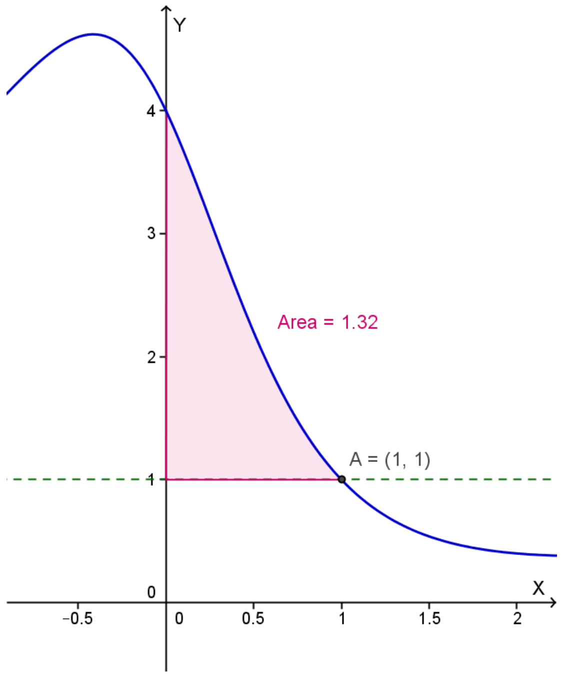
Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).

Essendo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $e\ x = tg\alpha$, dobbiamo trovare il massimo ed il minimo di f(x) quando $0 \leq x < +\infty$ (notiamo che se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la tangente non esiste ma il rapporto $\frac{CP^2+PQ^2+QC^2}{2a^2}$ ha senso e vale 1).

Il massimo del rapporto (che vale 4) si ha se $x = 0\ ,\ quindi\ \ tg\alpha = 0\ ,\ \ \alpha = 0$
Il minimo del rapporto (che $f(1+\sqrt{2}) \cong 0.4$) si ha se $x = 1+\sqrt{2}\ ,\ quindi\ \ tg\alpha = 1+\sqrt{2}$
da cui $\alpha = arctg(1+\sqrt{2}) = 67°30' = \frac{3}{8}\pi$

4)

Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale.

$$Area = \int_0^1 [f(x) - 1]dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1} - 1\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{-3x + 3}{x^2 + 1}\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{-3x}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{3}{x^2 + 1} dx = -\frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx + 3 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

$$= -\frac{3}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 + 3[arctg(x)]_0^1 = -\frac{3}{2}(ln2) + 3(arctg(1) - 0) = -\frac{3}{2}(ln2) + 3 \cdot \frac{\pi}{4} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2} ln2\right) u^2 \cong 1.32\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri