ORDINAMENTO 2009 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - lnx)\,, & per\ x > 0 \\ 0\ , & per\ x = 0 \end{cases}$$

1)

Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0? E' derivabile in tale punto?

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(2 - lnx) = \lim_{x\to 0^+}(-xlnx) = 0 = f(0)$: la funzione è continua.

Per $x > 0$ risulta:

$$f'(x) = 2 - lnx + x\left(-\frac{1}{x}\right) = 2 - lnx - 1 = 1 - lnx$$

Poiché: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, la funzione non è derivabile in $x = 0$ (dove si ha un punto a tangente verticale).

2)

Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Studiamo, per x>0, la funzione

$$y = f(x) = x(2 - lnx)$$

Dominio: $0 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Visto il dominio, la funzione non può essere né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, la funzione non esiste (nel suo prolungamento vale 0).

Se $y = 0$, $\quad x(2 - lnx) = 0$, $\quad lnx = 2$, $\quad x = e^2$

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \;\; 2 - lnx > 0 \quad\quad \Longrightarrow \quad lnx < 2 \, , \quad x < e^2$

Limiti:

$\lim_{x \to 0^+} x(2 - lnx) = \lim_{x \to 0^+} (-xlnx) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} x(2 - lnx) = -\infty$

Non c'è asintoto obliquo, poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

Derivata prima:

$f'(x) = 1 - lnx \geq 0$ se $lnx \leq 1 \;\Longrightarrow\; 0 < x \leq e$

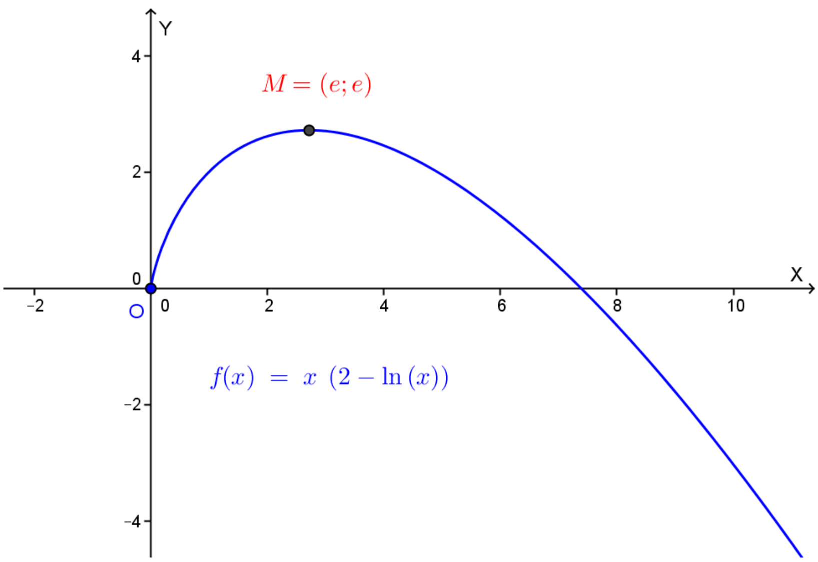
Pertanto la funzione è crescente se $0 < x < e$ e decrescente se $x > e$

$x = e$ punto di massimo relativo (e assoluto), $f(e) \cong e$

Derivata seconda:

$f''(x) = -\frac{1}{x} \geq 0$ mai: la concavità è sempre rivolta verso il basso.

Il grafico della funzione è il seguente (ricordiamo che f(0)=0):



3)

Si calcoli l'espressione, in funzione di t (t>0), dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - lnx)\,dx\,.$$

$$I(t) = -\int_{e^2}^{t} x(2 - lnx)\,dx = \int_{e^2}^{t} x(lnx - 2)\,dx$$

Cerchiamo, integrando per parti, una primitiva di $y = x(lnx - 2)$.

$$\int x(lnx-2)\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'(lnx-2)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot(lnx-2) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\,dx =$$

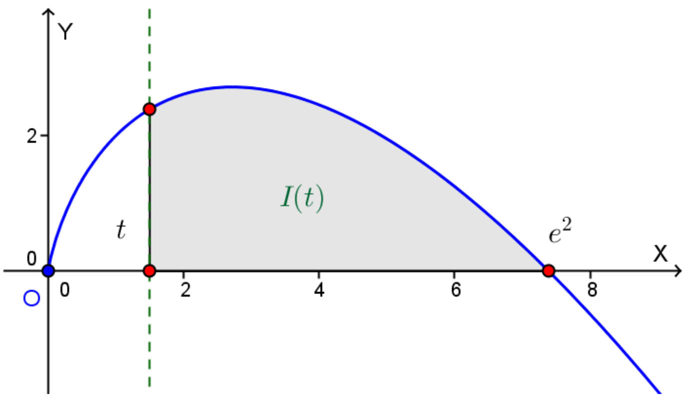
$$= \frac{x^2}{2}\cdot(lnx-2) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot(lnx-2) - \frac{1}{4}x^2 + K = \frac{1}{4}x^2(2lnx-5) + K$$

$$I(t) = \int_{e^2}^{t} x(lnx-2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2(2lnx-5)\right]_{e^2}^{t} = \frac{1}{4}t^2(2lnt-5) + \frac{1}{4}e^4$$

4)

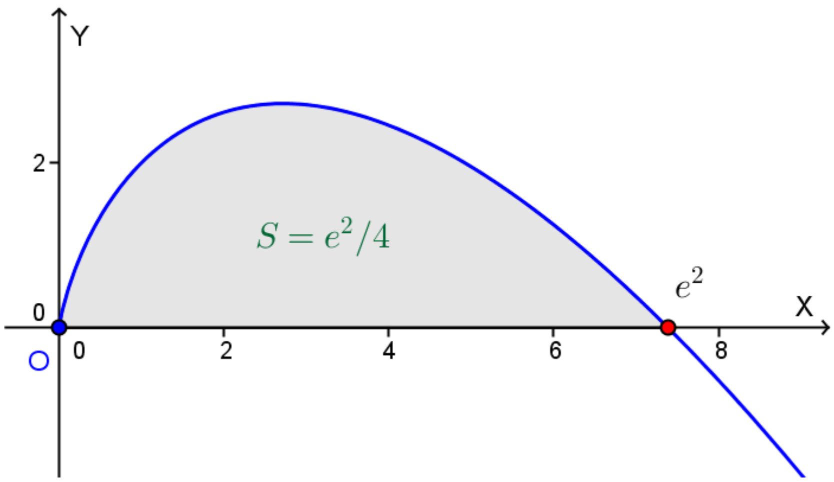
Si faccia vedere che $I(t)$ tende verso un limite finito quando t tende a 0.
Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente ?

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - lnx)\,dx\,.$$



$\lim_{t\to 0} I(t) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{4}t^2(2lnt-5)+\frac{1}{4}e^4\right] = \frac{1}{4}e^4 = \int_0^{e^2} x(2-lnx)\,dx$

Il limite richiesto rappresenta l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione e dall'asse x nell'intervallo $[0; e^2]$.



Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri