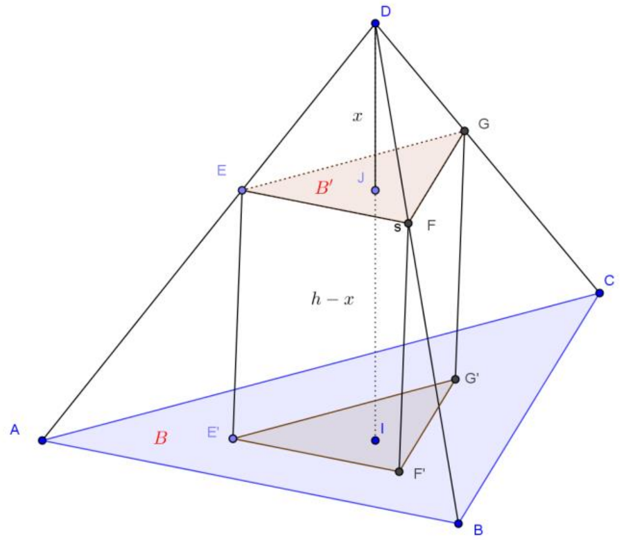
ORDINAMENTO 2009 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Una piramide, avente area di base B e altezza h, viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.



Indichiamo con h l'altezza della piramide e con x la distanza dal vertice del piano parallelo alla base. Per una proprietà delle piramidi, detta B' l'area della sezione, si ha:

$$B : B' = h^2 : x^2 \quad \Longrightarrow \quad B' = \frac{B \cdot x^2}{h^2}$$

Il prisma ha volume:

$$V(prisma) = A(base) \cdot altezza = B' \cdot (h - x) = \frac{B \cdot x^2}{h^2} \cdot (h - x)$$

Tale volume è massimo se lo è $y = x^2 \cdot (h - x)$.

Prima soluzione per via elementare:

$x^2 \cdot (h - x) = (x)^2 \cdot (h - x)^1$ è prodotto di due potenze le cui basi hanno somma costante (x e h-x), quindi è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{x}{2} = \frac{h - x}{1} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3} h$$

Il prisma ha volume massimo se la piramide viene tagliata con un piano parallelo alla base ad una distanza dal vertice uguale ai 2/3 dell'altezza.

Soluzione per con l'uso delle derivate:

$y = x^2 \cdot (h - x) = f(x)\,, \quad h > 0,\ \ 0 \le x \le h$

Siccome la funzione è continua (e derivabile) in un intervallo chiuso e limitato, ammette massimo e minimo assoluto, agli estremi oppure in un punto che annulla la derivata prima.

$f'(x) = 2x(h - x) - x^2 = -3x^2 + 2hx = 0\ se\ x = 0, \quad oppure \quad x = \dfrac{2}{3}h$

Risulta: $f(0) = f(h) = 0\,, \quad f\left(\frac{2}{3}h\right) = \frac{4}{27}h^3$: il massimo si ha per $x = \frac{2}{3}h$.
Allo stesso risultato si arriva se si studia il segno della derivata prima.

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + sen^2(x-1)}$ *, quando x tende a 1.*

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + sen^2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{ln^2(1 + (x-1)) + x - 1}{x(x-1) + sen^2(x-1)} =$$

Per x che tende a 1 si hanno i seguenti "asintotici":

$ln^2(1 + (x-1)) + x - 1 \sim (x-1)^2 + (x-1) \sim (x-1)$

$x(x-1) + sen^2(x-1) \sim (x-1) + (x-1)^2 \sim (x-1)$

il limite equivale a:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

OPPURE

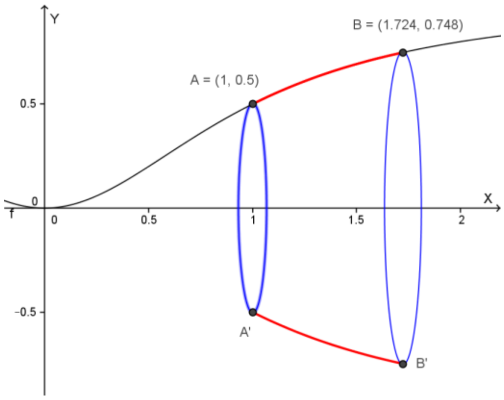
Posto $\quad x - 1 = t \quad$ il limite si trasforma in:

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln^2(1 + (x-1)) + x - 1}{x(x-1) + sen^2(x-1)} = \lim_{t \to 0} \frac{ln^2(1+t) + t}{(1+t)t + sen^2 t} = \lim_{t \to 0} \frac{t\left[\frac{\ln^2(1+t)}{t} + 1\right]}{t\left[1 + t + \frac{sen^2 t}{t}\right]} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\ln^2(1+t)}{t} + 1}{1 + t + \frac{sen^2 t}{t}} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\ln^2(1+t)}{t^2} \cdot t + 1}{1 + t + \frac{sen^2 t}{t^2} \cdot t} = \frac{1 \cdot 0 + 1}{1 + 0 + 1 \cdot 0} = 1$$

QUESITO 3

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *, dall'asse x e dalle rette* $x = 1\,, x = \sqrt{3}$ *.*



Nell'intervallo $[1; \sqrt{3}]$ la funzione $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è positiva, quindi il volume è dato dal seguente integrale:

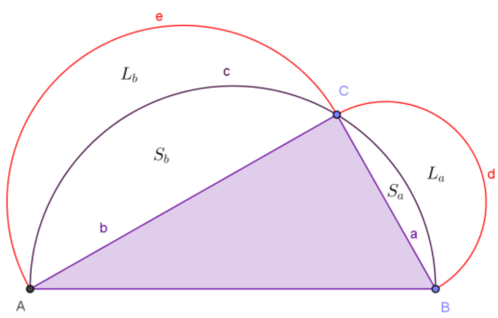
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \pi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \pi \int_1^{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{1+x^2}\right] dx =$$

$$= \pi \cdot [x - arctg(x)]_1^{\sqrt{3}} = \pi \cdot \left[\sqrt{3} - arctg(\sqrt{3}) - 1 + arctg(1)\right] = \pi \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right)\ u^3 =$$

$$= \pi \cdot \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{12}\pi\right)\ u^3 \ \cong\ 1.477\ u^3\ = V$$

QUESITO 4

Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.



$$Area(L_a) = Area(semicerchio\ di\ diametro\ a) - Area(segmento\ circolare\ S_a) =$$
$$= \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - Area(S_a) = \frac{\pi a^2}{8} - Area(S_a)$$

$$Area(L_b) = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 - Area(\ S_b) = \frac{\pi b^2}{8} - Area(\ S_b)$$

$$Area(L_a) + \ Area(L_b) = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - [Area(S_a) + Area(\ S_b)] =$$

$$= \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - [Area(semicerchio\ di\ diametro\ AB) - Area\ (triangolo\ ABC)] =$$

$$= \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \left[\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - Area\ (triangolo\ ABC)\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{a^2 + b^2}{4} + \ Area\ (triangolo\ ABC) = \ Area\ (triangolo\ ABC)$$

QUESITO 5

Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0\ , \qquad (1 - \lambda)x + y + 2 = 0\ ,$$

descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ.

$$\begin{cases} \lambda x - y - (\lambda + 2) = 0 \\ (1 - \lambda)x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lambda = \frac{y+2}{x-1} \quad (x \neq 1) \\ \left(1 - \frac{y+2}{x-1}\right)x + y + 2 = 0 \end{cases}$$ da cui:

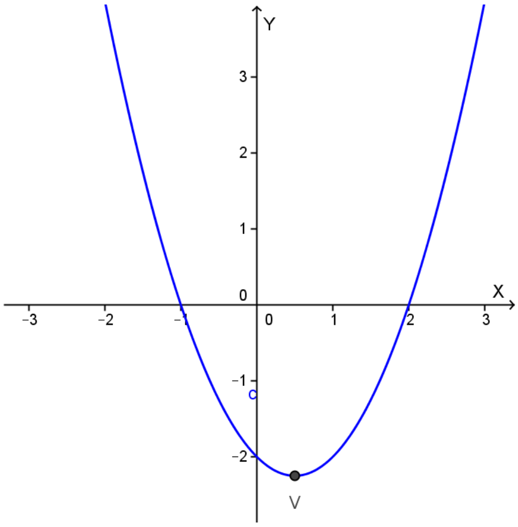
$$\frac{x - y - 3}{x - 1} \cdot x + y + 2 = 0 \quad , \qquad x^2 - xy - 3x + xy - y + 2x - 2 = 0$$

$y = x^2 - x - 2$: parabola di vertice $V = \left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, passante per $(0; -2), (-1; 0)$, $(2; 0)$ e privata del punto $(1; -2)$.

Se x=1 abbiamo:

$$\begin{cases} \lambda - y - (\lambda + 2) = 0 \\ (1 - \lambda) + y + 2 = 0 \end{cases} \ ; \quad \begin{cases} y = -2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Quindi il luogo richiesto è la parabola di equazione $y = x^2 - x - 2$, compreso il punto $(1; -2)$.



QUESITO 6

Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se e più grande il seno di α o il seno di β .

Risulta:

$\alpha = \pi^2 = \pi \cdot \pi \quad rad > 2\pi \ rad$: quindi α è maggiore di un angolo giro;
$\alpha = \pi^2 = \pi \cdot \pi \quad rad < 4\pi \ rad$: quindi α è minore di due angolo giro.

$\beta = 539° > 360°$: quindi β è maggiore di un angolo giro;
$\beta = 539° < 720°$: quindi β è minore di due angolo giro;

Per confrontare α e β trasformiamo, per esempio, α in gradi:

$$\alpha : \pi = a° : 180° \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha° = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi} = \frac{\pi^2 \cdot 180°}{\pi} = \pi \cdot 180° \cong 565° > \beta°$$

Quindi : $\alpha > \beta$.

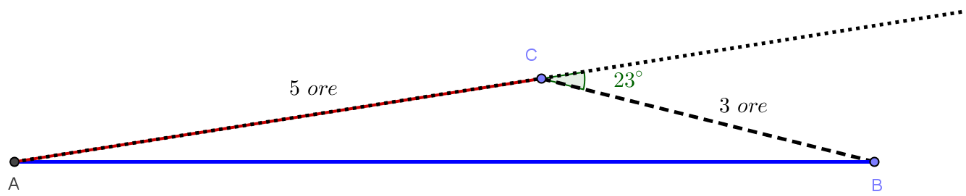
$sen(\alpha) \cong sen(565°) = sen(565° - 360°) = sen(205°) = sen(180° + 25°) = -sen(25°) \cong -0.423$

$sen(\beta) \cong sen(539°) = sen(539° - 360°) = sen(179°) = sen(180° - 1°) = sen(1°) \cong 0.017$

Quindi : $sen(\alpha) < sen(\beta)$.

QUESITO 7

Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?



Detta v la velocità costante, risulta:

$AC = 5v \quad , \qquad CB = 3v \quad , \quad AB = t_{AB} \cdot v$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(157°) = 25v^2 + 9v^2 - 30v^2 cos(157°) \cong 61.62\ v^2$

Quindi:

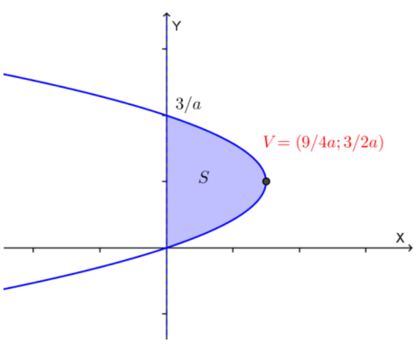
$AB = \sqrt{61.62\ v^2} \cong 7.85\ v$ quindi $t_{AB} = 7.85\ ore$

Il tempo perso è quindi pari a : $8\ ore - 7.85\ ore\ = 0.15\ ore = 9\ minuti$

QUESITO 8

Data la parabola $x = -ay^2 + 3y \quad (con\ a > 0)$, *si determini per quale valore di* a *l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.*

La parabola ha vertice in $V = \left(\frac{9}{4a}; \frac{3}{2a}\right)$, passa per $O = (0;0)$, $A = \left(0; \frac{3}{a}\right)$



L'area richiesta è quella di un segmento parabolico, che, per il teorema di Archimede è uguale a:

$$Area(S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{9}{4a} = \frac{9}{2a^2} = 72 \text{ da cui:}$$

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

QUESITO 9

Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

$N = aaaa = a \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + a \cdot 10^1 + a \cdot 10^0 = a \cdot (10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = a \cdot 1111 =$

$= a \cdot (101 \cdot 11) = (11a) \cdot 101$ *: divisibile per 101 per ogni* $a = 0,1,2,3, \dots ,9$

N.B.

$0000 = 101 \cdot 00$, $1111 = 101 \cdot 11$, $2222 = 101 \cdot 22$, $3333 = 101 \cdot 33$, ecc.

QUESITO 10

Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

Una funzione di equazione $y = f(x)$ è definita in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e soddisfa le seguenti ipotesi:

1) è continua in tutto l'intervallo;
2) è derivabile nell'intervallo aperto $(a: b)$;
3) risulta $f(a) = f(b)$.

Esiste allora almeno un punto c interno all'intervallo $[a; b]$ in cui si annulla la derivata.

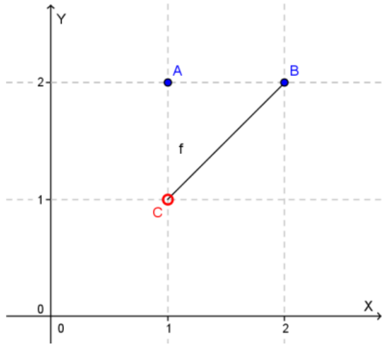
Facciamo cadere una (sola) delle ipotesi e dimostriamo, con un controesempio, che il teorema non vale.

1) La funzione non è continua in tutto l'intervallo chiuso, in particolare supponiamo che non sia continua in un estremo, per esempio a (se non fosse continua in un punto interno cadrebbe anche l'ipotesi 2, poiché se non fossi continua non sarebbe neanche derivabile).

Un semplice controesempio è fornito dalla seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ 1 < x \leq 2 \\ 2, & se\ x = 1 \end{cases}$$

La funzione soddisfa tutte le ipotesi, tranne la continuità in $x = 1$. Il teorema di Rolle non è valido per questa funzione, poiché in ogni punto interno all'intervallo $(1; 2)$ la derivata vale 1, quindi non si annulla mai.

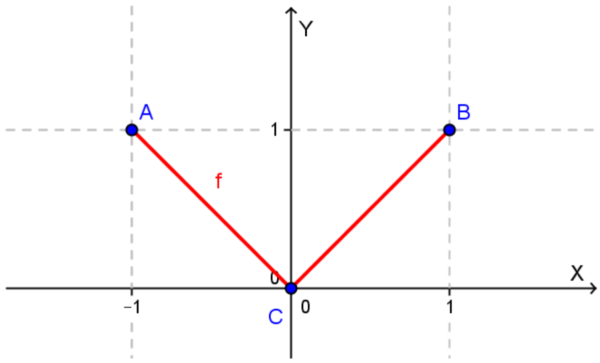


2) La funzione non è derivabile in tutto l'intervallo aperto.

Si consideri il seguente controesempio:

$$f(x) = |x| \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

La funzione soddisfa tutte le ipotesi tranne la derivabilità in $x = 0$ (dove c'è un punto angoloso). Il teorema non vale: infatti non esiste alcun punto interno all'intervallo in cui la derivata prima si annulla: in $(-1; 0)$ la derivata vale -1 , in $(0; 1)$ la derivata vale +1 .



3) La funzione non soddisfa la condizione $f(a) = f(b)$.

Si consideri il seguente controesempio:

$$f(x) = x^2 \quad , \quad 1 \leq x \leq 2$$

La funzione soddisfa tutte le ipotesi tranne $f(a) = f(b)$: infatti f(1)=1 ed $f(2) = 4$
Il teorema non vale: infatti non esiste alcun punto interno all'intervallo in cui la derivata prima si annulla: $f'(x) = 2x$ si annulla solo in $x = 0$, che non è interno all'intervallo dato.