# PNI 2009 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

*Si consideri la funzione:*

$$f(x)=\begin{cases} ln\sqrt{x^2+1} & per\ x<0 \\ 0 & per\ x=0 \\ arctg\ senx & per\ x>0 \end{cases}$$

## 1)

*Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto* $x = 0$.

Continuità*:*

$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^-} ln\sqrt{x^2+1}=0$

$\lim_{x\to 0^+} arctg\ senx\ =0$

Quindi la funzione è continua in x=0.

Derivabilità:

Se x<0: $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1),\ \ f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}\to 0\quad se\ \ x\to 0^-$
Se x>0: $f(x)=arctg\ senx\ \ ,\ \ f'(x)=\frac{cosx}{1+sen^2x}\to 1\quad se\ \ x\to 0^+$

Quindi la funzione NON è derivabile in x=0 (abbiamo un punto angoloso).

## 2)

*Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico* $\gamma$*, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo* $0\le x\le 2\pi$.

$$f(x)=\begin{cases} ln\sqrt{x^2+1} & per\ x<0 \\ 0 & per\ x=0 \\ arctg\ senx & per\ 0<x\le 2\pi \end{cases}$$

Studiamo la funzione di equazione:

$y = \ ln\sqrt{x^2+1} \ \ per \ x < 0$

**Dominio**: $-\infty < x < 0$

**Simmetrie notevoli:**

Non si pone il problema, dato l’intervallo di studio.

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

Se $y = 0, \quad ln\sqrt{x^2+1} = 0, \ da \ cui \ \sqrt{x^2+1} = 1, \quad x = 0$

**Segno della funzione:**

$y > 0 \ \ se \ \ ln\sqrt{x^2+1} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} > 1\!: \ \forall x$

**Limiti:**

$\lim_{x\to-\infty} ln\sqrt{x^2+1} = +\infty$ ;

Non c’è asintoto obliquo, poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

**Derivata prima:**

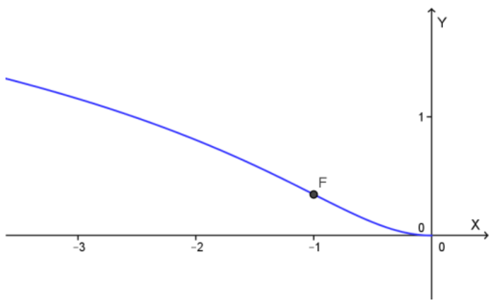
$y' = \frac{x}{x^2+1} < 0 \ \ se \ x < 0$: la funzione è sempre decrescente in $-\infty < x < 0$.

**Derivata seconda:**

$y'' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$ se $1 - x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 1 \leq 0 \quad \Longrightarrow x \leq -1 \quad or \quad x \geq 1$

Nel nostro intervallo di studio $y'' \geq 0 \quad se \quad x \leq -1$ , $y'' < 0 \quad se \quad -1 < x < 0$

Il grafico della funzione di equazione $y = \ ln\sqrt{x^2+1} \ \ per \ x < 0$ è il seguente:



Studiamo la funzione di equazione: $y = arctg\ senx \qquad per\ 0 \leq x \leq 2\pi$

**Dominio**: $0 \leq x \leq 2\pi$

**Simmetrie notevoli:**

Non si pone il problema, dato l'intervallo di studio.

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

Se $x = 0, \quad y = 0$
Se $y = 0, \quad x = 0, \pi, 2\pi$

**Segno della funzione:**

$y > 0 \quad se \quad arctg\ senx > 0 \quad \Longrightarrow \quad senx > 0\text{:} \quad 0 < x < \pi$

**Limiti:**

La funzione è definita e continua in un intervallo chiuso e limitato, quindi calcoliamo i valori che assume agli estremi:

$f(0) = f(2\pi) = 0$

**Derivata prima:**

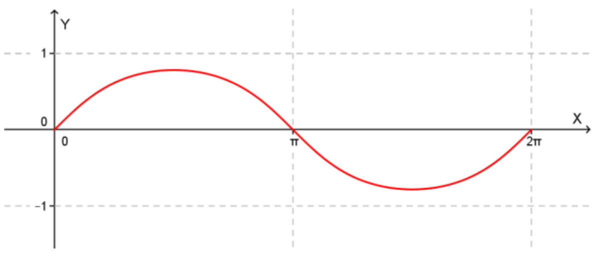
$y' = \frac{cosx}{1+sen^2x} > 0 \quad se \quad cosx > 0 : \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$ : in tali intervalli la funzione è cresce; $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo (e assoluto), è vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ ; $x = \frac{3}{2}\pi$ è punto di minimo relativo (e assoluto), è vale $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

**Derivata seconda:**

$$-\frac{2\sin(x)\left(\cos(2x)+5\right)}{\left(\cos(2x)-3\right)^2} > 0$$

se $sen(x) < 0, \quad \pi < x < 2\pi$ : il grafico quindi volge la concavità verso l'alto per $\pi < x < 2\pi$ e verso il basso per $0 < x < \pi$ ; abbiamo un flesso in $(0;\pi)$.

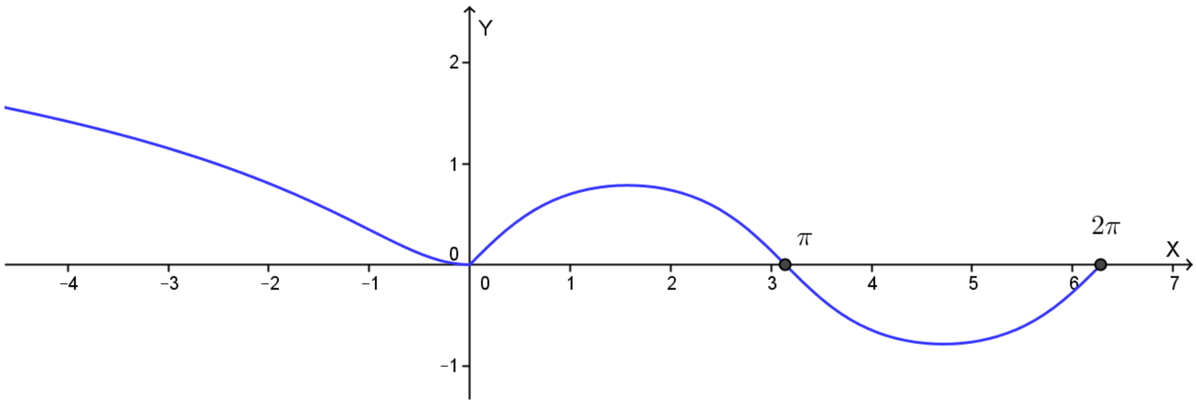
*Il grafico della funzione di equazione* $y = arctg\ senx \qquad per\ 0 \leq x \leq 2\pi$ è il seguente:



Il grafico della funzione di equazione:

$$f(x) = \begin{cases} ln\sqrt{x^2+1} & per\ x < 0 \\ 0 & per\ x = 0 \\ arctg\ senx & per\ 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

è pertanto il seguente:




## 3)

*Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel **II** quadrante, delimitata dalla curva $\gamma$, dall'asse x e dalla retta di equazione x = -1.*

L'area richiesta è data dal seguente integrale:

$$\int_{-1}^{0} ln\sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{0} \ln(x^2+1)\, dx$$

Cerchiamo, integrando per parti, una primitiva di $y = \ln(x^2+1)$.

$$\int \ln(x^2+1)\, dx = \int (x)' \cdot \ln(x^2+1)\ dx = x \cdot \ln(x^2+1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\ dx =$$

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx = x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\ dx =$$

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2arctg(x) + k$$

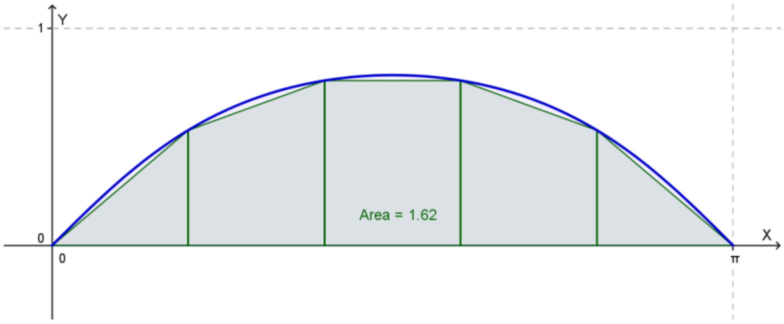
Quindi:

$$Area = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{0} \ln(x^2+1)\, dx = \frac{1}{2}[x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2arctg(x)]_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\ln(2) + 2 + 2(-\frac{\pi}{4})\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right] = \left(\frac{\pi}{4} + ln\sqrt{2} - 1\right)\ u^2 \cong 0.1320\ u^2$$

## 4)

*Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle $x$ e dall'arco di $\gamma$ i cui estremi hanno ascisse $0$ e $\pi$.*

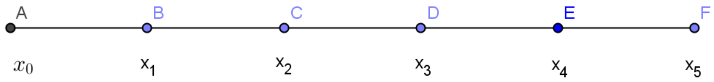



Posto $f(x) = arctg\ senx$ , consideriamo l'intervallo $[0;\pi]$ e dividiamolo in n parti; poniamo $h = \frac{\pi-0}{n} = \frac{\pi}{n}$.

Utilizzando, per esempio, la formula dei trapezi, l'integrale dato può essere approssimato mediante la formula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso, ponendo per esempio n=5, abbiamo $h = \frac{1}{5}$




$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{5},\quad x_2 = \frac{2}{5}\pi,\ x_3 = \frac{3}{5}\pi,\ x_4 = \frac{4}{5}\pi,\ x_5 = \pi$$

Quindi si ha la seguente approssimazione:

$$Area = \int_0^\pi arctg\ senx\ dx \cong \frac{\pi}{5}\cdot\left[\frac{f(0)+f(\pi)}{2} + f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\pi\right) + f\left(\frac{3}{5}\pi\right) + f\left(\frac{4}{5}\pi\right)\right] =$$
$$\cong 1.62\ u^2$$

(il valore esatto è 1.69)

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri