PNI 2009 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità p = 1/2 assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?

Le cinquine favorevoli equivalgono alle combinazioni semplici di 89 oggetti a 4 a 4.
Le cinquine possibili equivalgono alle combinazioni semplici di 90 oggetti a 5 a 5.
Quindi:

$$p(estrazione\ di\ 1\ numero\ assegnato) = \frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{2441626}{43949268} = \frac{1}{18}$$

La probabilità che NON esca mai un dato numero in n estrazioni è data da:

$$\left(1-\frac{1}{18}\right)^n = \left(\frac{17}{18}\right)^n$$

La probabilità che il numero dato esca almeno una volta in n estrazioni è pari a:

$$p = 1-\left(\frac{17}{18}\right)^n$$

Tale probabilità è uguale a 1/2 se:

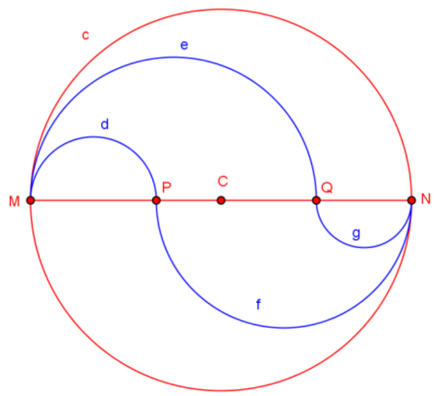
$$1-\left(\frac{17}{18}\right)^n = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{17}{18}\right)^n = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad ln\left(\frac{17}{18}\right)^n = ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad n \cdot ln\left(\frac{17}{18}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right)$$ da cui:

$$n = \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{ln\left(\frac{17}{18}\right)} \cong 12.13$$

Occorre quindi aspettare 13 estrazioni.

QUESITO 2

Sul diametro MN di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su MP, MQ, NP, NQ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (pelecoide) così ottenuto, ha la stessa lunghezza della circonferenza data.



Risulta:

$$e+g=d+f=\pi\cdot\frac{MQ}{2}+\pi\cdot\frac{QN}{2}=\pi\cdot\left(\frac{MQ+QN}{2}\right)=\pi\cdot\frac{MN}{2}$$

Quindi: $(e+g)+(d+f)=2\left(\pi\cdot\frac{MN}{2}\right)=c$

QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{sen\frac{x}{2}}\frac{e^{t^2}}{|t|+1}dt$$

nel punto P di ascissa $x=\pi/2$.

Notiamo intanto che $f(\pi/2)=0$, poiché gli estremi dell'integrale sono uguali.
Calcoliamo ora il coefficiente angolare della tangente, che equivale ad $f'(\pi/2)$.
Ricordiamo che:

$$f(x)=\int_a^x g(t)dt\ \Rightarrow\ f'(x)=g(x),\qquad f(x)=\int_a^{b(x)}g(t)dt\ \Rightarrow\ f'(x)=g(b(x))\cdot b'(x)$$

Nel nostro caso:

$$f'(x)=\frac{e^{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\left|sen\frac{x}{2}\right|+1}\cdot\left[\frac{1}{2}cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\quad\Rightarrow\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{e}\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+2)}=$$

$$=\frac{\sqrt{e}\left(2-2\sqrt{2}\right)}{-4}=\frac{\sqrt{e}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\cong 0.34$$

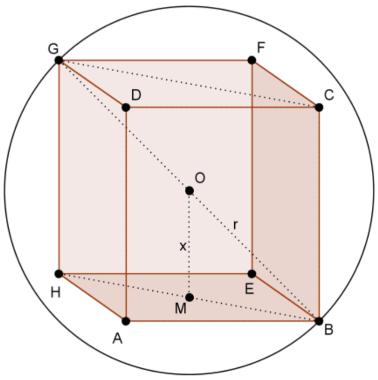
Quindi la tangente richiesta ha equazione:

$$y-0=\frac{\sqrt{e}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{\sqrt{e}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

QUESITO 4

Siano dati una sfera di raggio r, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.

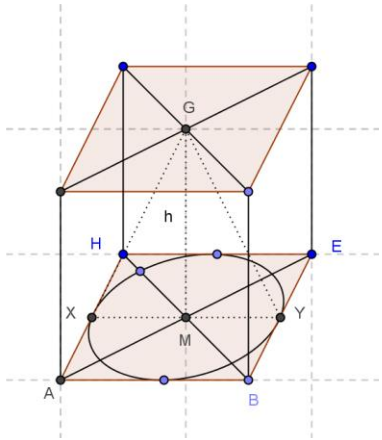
Consideriamo il cubo inscritto nella sfera di raggio r e determiniamo lo spigolo del cubo in funzione di r.



La diagonale d del cubo è uguale al diametro $2r$ della sfera, quindi, detto l lo spigolo del cubo, risulta:

$$d = l\sqrt{3} = 2r \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Consideriamo ora il cono inscritto nel cubo.



Il suo raggio di base è la metà dello spigolo del cubo:

$$raggio\ cono = \frac{l}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

L'altezza del cono è uguale allo spigolo del cubo.

Calcoliamo i volumi dei tre solidi:

$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi r^3\,, \quad V(cubo) = l^3 = \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}r^3\sqrt{3}\,,$$

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi r_c^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 l = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{r^2}{3}\cdot\frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{27}\pi r^3\sqrt{3}$$

La probabilità richiesta è data da:

$$p = \frac{Volume\ favorevole}{Volume\ possibile} = \frac{V(cono)}{V(sfera)} = \frac{\frac{2}{27}\pi r^3\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{18}\sqrt{3} \cong 0.096 \cong 10\%$$

QUESITO 5

Nell' omotetia di centro $O(0,0)$ e rapporto $k = -4$, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra di loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

L'omotetia indicata ha equazioni:

$$\begin{cases} X = -4x \\ Y = -4y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4}X \\ y = -\frac{1}{4}Y \end{cases}$$

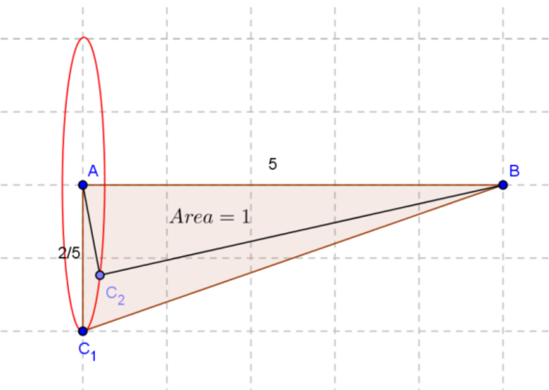
La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ si trasforma in:

$$\left(-\frac{1}{4}X\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}Y\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{4}X\right) + 4\left(-\frac{1}{4}Y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad X^2 + Y^2 + 8X - 16Y = 0$$

Il centro della circonferenza di partenza è $C = (1; -2)$, quello della circonferenza trasformata è $C' = (-4; 8)$, che è il corrispondente di C nell'omotetia data.
Analogamente al raggio $R = \sqrt{1 + 4 - 0} = \sqrt{5}$ della circonferenza di partenza corrisponde il raggio $R' = \sqrt{16 + 64 - 0} = 4\sqrt{5} = |k| \cdot R$.

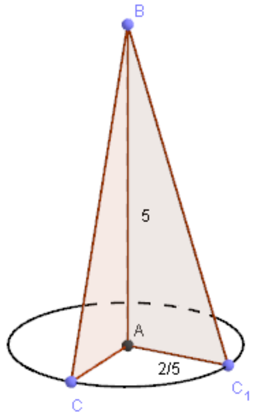
QUESITO 6

Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a $1\ cm^2$.



Risulta $CA = \frac{2 \cdot 1}{5}\ cm = \frac{2}{5}\ cm$

C varia nel piano α passante per A perpendicolare ad AB e dista 2/5 da A: il luogo richiesto è quindi la circonferenza del piano α con centro in A e raggio 2/5.



QUESITO 7

Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale λ e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ (\lambda-1)x+\lambda y+4z=0 \\ \lambda x+5y+(2\lambda+1)z=0 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti (utilizziamo il teorema di Laplace operando sulla prima riga):

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda-1 & \lambda & 4 \\ \lambda & 5 & 2\lambda+1 \end{vmatrix}=1\cdot(2\lambda^2+\lambda-20)-2\cdot(2\lambda^2-\lambda-1-4\lambda)+3\cdot(5\lambda-5-\lambda^2)=$$
$$=-5\lambda^2+26\lambda-33$$

$$D=-5\lambda^2+26\lambda-33=0 \quad se \quad \lambda=3 \quad oppure: \quad \lambda=\frac{11}{5}$$

Quindi, $\lambda \neq 3 \quad e \quad \lambda \neq \frac{11}{5}$ il sistema ammette una sola soluzione, che, essendo omogeneo, è la soluzione nulla: x=0, y=0, z=0.

Se $\lambda=3 \quad oppure \quad \lambda=\frac{11}{5}$ il sistema è indeterminato o impossibile, ma essendo omogeneo ammette sempre la soluzione nulla, quindi non può essere impossibile.

Risolviamo il sistema nei due casi:

a) $\lambda=3$

Il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \end{cases}$$ notiamo che la terza equazione è uguale alla somma delle prime due.

Il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} x+2y=-3z \\ 2x+3y=-4z \end{cases}$$

Poniamo z=k e risolviamo con la regola di Cramer.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1 \;\; ; \quad D_x=\begin{vmatrix} -3k & 2 \\ -4k & 3 \end{vmatrix}=-k \;\; ; \quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3k \\ 2 & -4k \end{vmatrix}=+2k$$

$x=\frac{D_x}{D}=k$; $y=\frac{D_y}{D}=2k$; $z=k$ (quando $\lambda=3$)

b) $\lambda=\frac{11}{5}$

Il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ (\lambda-1)x+\lambda y+4z=0 \\ \lambda x+5y+(2\lambda+1)z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ \dfrac{6}{5}x+\dfrac{11}{5}y+4z=0 \\ \dfrac{11}{5}x+5y+\dfrac{27}{5}z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 6x+11y+20z=0 \\ 11x+25y+27z=0 \end{cases}$$

Il sistema dato è equivalente, per esempio, al sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 6x+11y+20z=0 \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} x+2y=-3z \\ 6x+11y=-20z \end{cases}$$

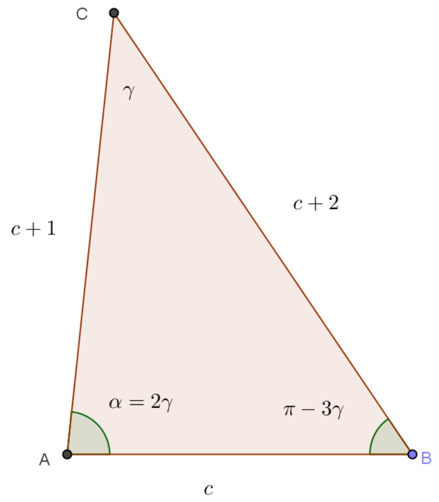
Poniamo z=h e risolviamo con la regola di Cramer.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}=-1 \;\; ; \quad D_x=\begin{vmatrix} -3h & 2 \\ -20h & 11 \end{vmatrix}=7h \;\; ; \quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3h \\ 6 & -20h \end{vmatrix}=-2h$$

$x=\frac{D_x}{D}=-7h$; $y=\frac{D_y}{D}=2h$; $z=h$ (quando $\lambda=\frac{11}{5}$)

QUESITO 8

Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.



Dette c, c+1 e c+2 le misure dei lati del triangolo (con c intero), poiché a lato maggiore si oppone angolo maggiore, l'angolo maggiore è quello in A ed è il doppio dell'angolo minore che è quello in C.

Per il teorema dei seni si ha:

$\frac{c}{sen\gamma} = \frac{c+2}{sen2\gamma}$, quindi: $c \cdot sen2\gamma = (c+2) \cdot sen\gamma$ da cui:

$c \cdot 2sen\gamma cos\gamma = (c+2) \cdot sen\gamma \quad \Longrightarrow \quad 2c \cdot cos\gamma = c+2$

$\frac{c}{sen\gamma} = \frac{c+1}{sen(\pi-3\gamma)} = \frac{c+1}{sen3\gamma} \quad \Longrightarrow \quad c \cdot sen3\gamma = (c+1) \cdot sen\gamma$

Ed essendo $sen3\gamma = sen(\gamma + 2\gamma) = sen\gamma cos2\gamma + sen2\gamma cos\gamma = sen\gamma(cos2\gamma + 2\cos^2\gamma)$

si ha: $c \cdot sen3\gamma = (c+1) \cdot sen\gamma \quad \Longrightarrow \quad c \cdot sen\gamma(cos2\gamma + 2\cos^2\gamma) = (c+1) \cdot sen\gamma$

ossia: $c \cdot (cos2\gamma + 2\cos^2\gamma) = c+1$. Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} 2c \cdot cos\gamma = c+2 \\ c \cdot (cos2\gamma + 2\cos^2\gamma) = c+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} cos\gamma = \dfrac{c+2}{2c} \\ c \cdot (2\cos^2\gamma - 1 + 2\cos^2\gamma) = c+1 \end{cases} ;$$

$\begin{cases} cos\gamma = \frac{c+2}{2c} \\ c \cdot (4\cos^2\gamma - 1) = c+1 \end{cases}$; $c \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{c+2}{2c}\right)^2 - 1\right) = c+1 \implies c^2 - 3c - 4 = 0$, che ha come

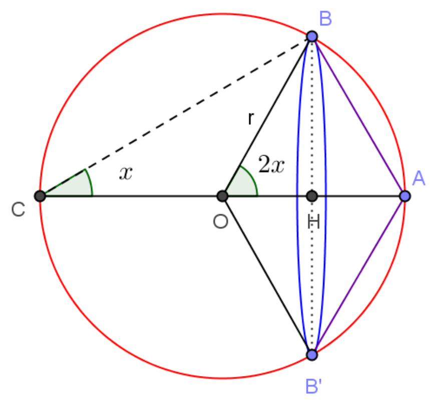
soluzioni: $c = -1 \ (non\ acc.) \quad e \quad c = 4$: il lato minore misura quindi 4.

Cerchiamo ora il coseno dell'angolo minore:

$$cos\gamma = \frac{c+2}{2c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

QUESITO 9

Si consideri un cerchio di centro O e raggio r e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre OB un raggio mobile che forma l'angolo $2x$ con OA. Facendo ruotare la figura attorno ad OA, il segmento AB genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo perché quest'area sia massima?



Possiamo limitarci a considerare l'angolo $2x$ compreso tra 0 e π , quindi: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
La superficie laterale del cono generato dalla rotazione di AB è data da:

$S = \pi Ra = \pi \cdot BH \cdot AB = \pi \cdot (rsen2x) \cdot (2rsenx) = 2\pi r^2 \cdot senx \cdot sen2x$

S è massima se lo è $y = f(x) = \ senx \cdot sen2x \quad con \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Tale funzione è continua (e anche derivabile) in un intervallo chiuso e limitato, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluti. Tali valori sono da ricercare agli estremi dell'intervallo o nei punti che annullano la derivata prima.

$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$f'(x) = cosx\ sen2x + 2senx\ cos2x = 2senx(\cos^2 x + cos2x) = 2senx(3\cos^2 x - 1)$

Risulta $f'(x) = 0$ se: $senx = 0 \implies x = 0$ oppure $3\cos^2 x - 1 = 0$, che , nel nostro intervallo, equivale a $cosx = \frac{\sqrt{3}}{3}$; in questo caso si ha: $senx = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
Per tale valore di x si ha:

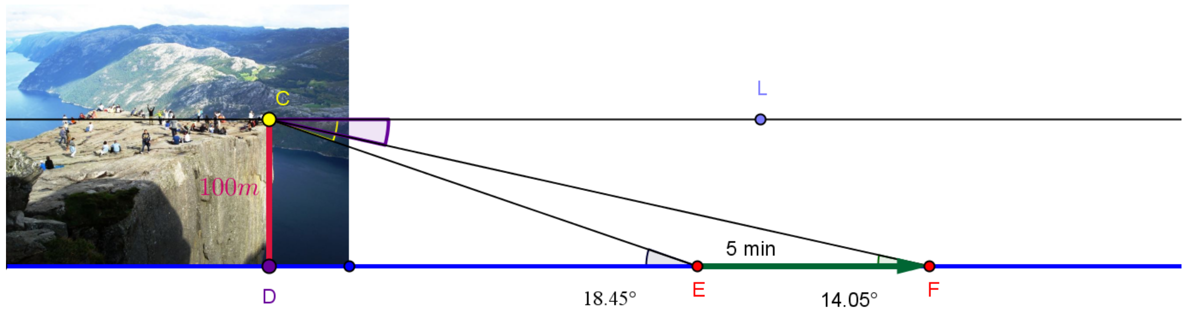
$$f(x) = senx \cdot sen2x = 2sen^2xcosx = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

La superficie è quindi massima quando $senx = \frac{\sqrt{6}}{3}$, con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

L'angolo x è dato da: $arcsen\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cong 54.736° \cong 54°44'$

QUESITO 10

Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?



Osserviamo che il primo angolo di depressione LCO è uguale all'angolo CED, mentre il secondo, LCF, è uguale all'angolo CFD.

Dobbiamo trovare lo spazio EF. Ma risulta:

$$EF = DF - DE = CD \cdot cotg(14.05°) - CD \cdot cotg(18.45°) =$$
$$= 100[cotg(14.05°) - cotg(18.45°)]\ m \cong 99.85\ m$$

Quindi la velocità del drago in metri all'ora è:

$$v(drago) = \frac{EF}{5\ min} = \frac{99.85\ m}{\frac{5}{60}h} = 499.25\frac{m}{h} \cong 500\ m/h$$