ORDINAMENTO 2009 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Si consideri la funzione f definita da: $f(x) = \frac{x+1}{e^{3x}}$.

1)

Si studi f e se ne tracci il grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

Dominio:

La funzione è definita su tutto R.

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=1 ; se y=0: x=-1: la funzione non può essere pari né dispari.

Positività:

La funzione è positiva se x>-1.

Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{e^{3x}} = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^{3x}} = 0^+; \quad (e^{3x}\ domina\ rispetto\ ad\ x)$$

Asintoti:

La funzione è continua su tutto R: non ci sono asintoti verticali.
Dal precedente calcolo dei limiti si deduce che c'è l'asintoto orizzontale y=0 per $x \to +\infty$
Vediamo se per caso c'è asintoto obliquo al meno infinito:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x\, e^{3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{xe^{3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{3x}} = +\infty$: non c'è asintoto obliquo.

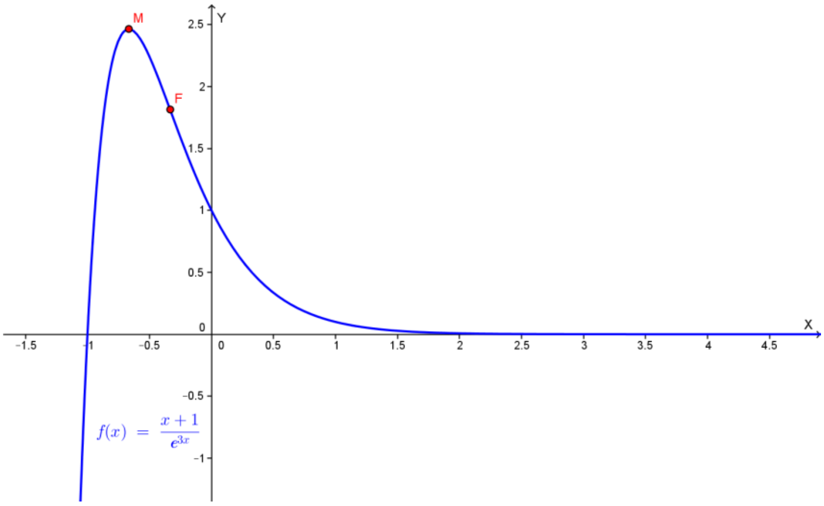
Derivata prima:

$f'(x) = \frac{-3x-2}{e^{3x}} \geq 0 \quad se \quad x \leq -\frac{2}{3}$: la funzione è crescente se $x < -\frac{2}{3}$ e decrescente se $x > -\frac{2}{3}$; $x = -\frac{2}{3}$ è punto di massimo relativo (e assoluto), con ordinata $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{e^{-2}} = \frac{e^2}{3}$.

Derivata seconda:

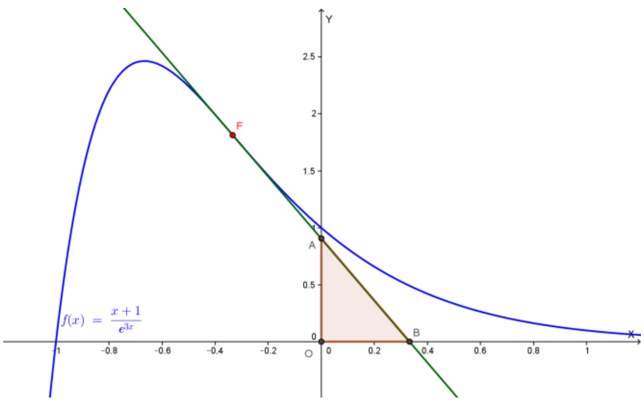
$f''(x)=\frac{9x+3}{e^{3x}}\geq 0 \quad se \quad x\geq -\frac{1}{3}$. Concavità verso l'alto se $x>-\frac{1}{3}$, verso il basso se $x<-\frac{1}{3}$; $x=-\frac{1}{3}$ punto di flesso, con ordinata $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{2}{3}}{e^{-1}}=\frac{2e}{3}$.

Grafico della funzione:



2)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.



$$F=\left(-\frac{1}{3};\frac{2e}{3}\right);\quad f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-e\ ;\quad y-\frac{2e}{3}=-e\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

L'equazione della tangente nel punto di flesso è:

$y = -ex + \frac{1}{3}e$

Cerchiamo le intersezioni della tangente inflessionale con gli assi cartesiani:

$Se \quad x = 0,\ y = \frac{1}{3}e; \qquad Se \quad y = 0, \qquad x = \frac{1}{3}$

$Area(OAB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}e = \frac{1}{18}e \cong 0.15\ u^2$

3)

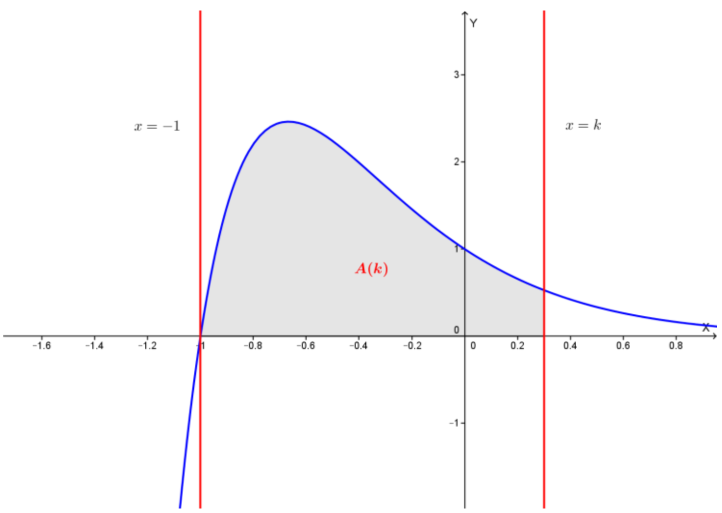
Si provi che la funzione $F(x) = -\frac{1}{9}e^{-3x}(3x+4)$ *è una primitiva della funzione f (x).*

Deve essere: $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = \frac{1}{3}e^{-3x}(3x+4) - \frac{1}{9}e^{-3x}(3) = e^{-3x}\left(x + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = e^{-3x}(x+1) = \frac{x+1}{e^{3x}} = f(x).$$

4)

Si calcoli l'area A(k) della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette x= -1 e x = k con k > 0. Cosa si può dire di A(k) quando $k \to +\infty$?



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{-1}^{k} \frac{x+1}{e^{3x}}\,dx = \int_{-1}^{k} (x+1)e^{-3x}\,dx$$

Cerchiamo una primitiva di $(x+1)e^{-3x}$ integrando per parti:

$$f = x+1, \qquad f' = 1\,, \quad g' = e^{-3x} \;, \quad g = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$\int (x+1)e^{-3x}\;dx = (x+1)\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}(x+1) - \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$= -\frac{3x+4}{9e^{3x}}$$

Quindi:

$$\int_{-1}^{k} (x+1)e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{3x+4}{9e^{3x}}\right]_{-1}^{k} = -\frac{3k+4}{9e^{3k}} + \frac{1}{9e^{-3}} = A(k)$$

$$\lim_{k\to+\infty} A(k) = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{3k+4}{9e^{3k}} + \frac{1}{9e^{-3}}\right) = \frac{1}{9e^{-3}} = \frac{e^{3}}{9} \cong 2.23\;u^{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria