ORDINAMENTO 2009 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Sia $f(x) = \mathrm{a}\cos^3 x + b\, cosx + c \quad e \quad x \in \mathbb{R}$ *.*

1)

Si determinino a, b, c in modo che risulti

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$, $f(\pi) = \frac{4}{3}$, $f''(\pi) = 0$.

$c = \frac{2}{3}$; $\quad -a - b + c = \frac{4}{3}$; $\quad f'(x) = -3\,\mathrm{a}\cos^2 x\, senx - bsenx$;

$f''(x) = 6acosx\, sen^2 x - 3\,\mathrm{a}\cos^3 x - bcosx$; $\quad f''(\pi) = 3a + b = 0$

$$\begin{cases} c = \frac{2}{3} \\ -a - b + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ b = -3a \end{cases} ; \quad \begin{cases} c = \frac{2}{3} \\ 2a = \frac{2}{3} \\ b = -3a \end{cases} ; \quad \begin{cases} c = \frac{2}{3} \\ a = \frac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - cosx + \frac{2}{3}$$

2)

Si studi, nell'intervallo chiuso $[0; 2\pi]$*, la funzione così trovata e se ne tracci il grafico.*

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - cosx + \frac{2}{3}$$

Dominio:

La funzione è definita e continua nell'intervallo richiesto $[0; 2\pi]$ ed assume agli estremi i seguenti valori:

$f(0) = f(2\pi) = 0$

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=0 ; se y=0: $\frac{1}{3}\cos^3 x - cosx + \frac{2}{3} = 0,\ \ cos^3x - 3cosx + 2 = 0;$
abbassiamo di grado con cosx=1 applicando la regola di Ruffini:

$(cosx - 1)(cosx + 2)^2 = 0$ quindi solo cosx=1, cioè $x = 0\ \ e\ \ x = 2\pi$.

Positività:

$f(x) \geq 0\ \ per\ ogni\ x$.

Limiti:

La funzione è continua in tutto l'intervallo di studio, non ci sono limiti da calcolare.

Asintoti:

Non ci possono essere asintoti.

Derivata prima:

$f'(x) = -\cos^2 x\ senx + senx \geq 0\ \ se\ \ senx(1 - \cos^2 x) \geq 0,\qquad sen^3x \geq 0\ ,\qquad senx \geq 0$

Risulta quindi: $f'(x) \geq 0$ se $0 \leq x \leq \pi$, pertanto la funzione è crescente se

$0 < x < \pi$ e decrescente se $\pi < x < 2\pi$. Punto di massimo relativo (e assoluto) $x = \pi$ con ordinata $f(\pi) = \frac{4}{3}$.

Derivata seconda:

$f''(x) = 2cosx\ sen^2x - \cos^3 x + cosx\ \geq 0\ \ se\ \ cosx(2sen^2x - \cos^2 x + 1) \geq 0$.

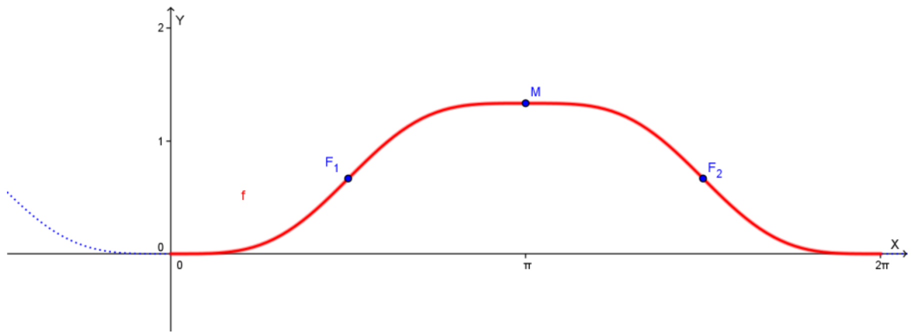
Studiamo il segno dei due fattori:

$cosx \geq 0\ \ se\ \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\ \ vel\ \ \dfrac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$
$2sen^2x - \cos^2 x + 1 \geq 0\ ,\ \ 3sen^2x \geq 0\ \ : per\ ogni\ x$

Quindi risulta:

$f''(x) \geq 0\ \ se\ \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ \ vel\ \ \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ pertanto il grafico volge la concavità verso l'alto se $0 < x < \frac{\pi}{2}\ \ vel\ \ \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; $x = \frac{\pi}{2}\ \ e\ x = \frac{3}{2}\pi$ sono punti di flesso, con ordinata uguale a 2/3.

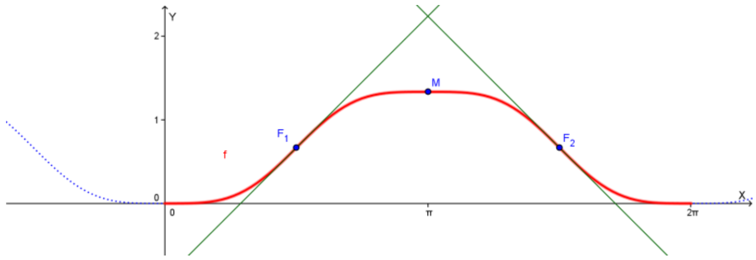
Grafico della funzione:



3)

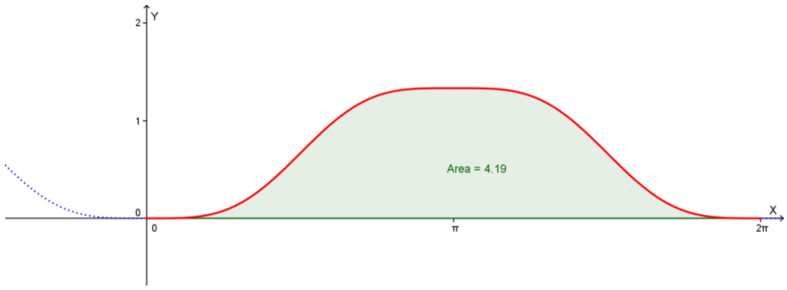
Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a γ *nei due punti di flesso.*

I punti di flesso sono: $F_1 = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\right)$, $F_2 = \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{2}{3}\right)$.
Troviamo i coefficienti angolari delle tangenti:
$m_1 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $m_2 = f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$
Tangente in F_1: $y - \frac{2}{3} = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = x + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}$
Tangente in F_2: $y - \frac{2}{3} = -\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$, $y = -x + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\pi$



4)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata da γ *e dall'asse delle ascisse.*



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos^3 x - cosx + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (cos^3x - 3cosx + 2)\, dx$$

Cerchiamo una primitiva di cos^3x:

$$\int cos^3x \;\, dx = \int cosx\, cos^2x \;\, dx = \int cosx\,(1 - sen^2x)dx = \int (cosx - cosx\, sen^2x)dx =$$

$$= senx - \frac{1}{3}sen^3x + C$$

Quindi:

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (cos^3x - 3cosx + 2)\, dx = \frac{1}{3}\left[senx - \frac{1}{3}sen^3x - 3senx + 2x\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi \cong 4.19\; u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria