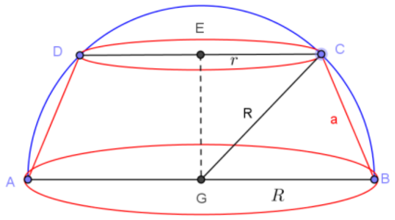
ORDINAMENTO 2009 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Si inscriva in una semisfera di raggio R il tronco di cono di massima superficie laterale, avente la base maggiore coincidente con quella della semisfera. Si assuma come incognita l'apotema del tronco di cono.



La superficie laterale del cono è:

$S_l = \pi a(r+R)$, dove a è l'apotema, r ed R i raggi di base.

Posto a=x, il raggio minore della sfera è: $r = \sqrt{R^2 - h^2}$; l'altezza h del tronco è data da:

$h^2 = a^2 - (R-r)^2$, quindi: $r = \sqrt{R^2 - a^2 + R^2 + r^2 - 2rR}$ quindi:

$$r^2 = 2R^2 - x^2 + r^2 - 2rR \ , \quad 2rR = 2R^2 - x^2 \ , \quad r = \frac{2R^2 - x^2}{2R}$$

$S_l = \pi a(r+R) = \pi x\left(\frac{2R^2-x^2}{2R} + R\right) = \frac{\pi}{2R}\, x\,(4R^2 - x^2)$ che è massima se lo è:

$y = x(4R^2 - x^2)$, con $0 \le x \le R\sqrt{2}$.

Risoluzione per via elementare:

$y = x(4R^2 - x^2) = (x^2)^{\frac{1}{2}}(4R^2 - x^2)^1$: si tratta del prodotto di due potenze in cui la somma delle basi ($x^2\ e\ \ 4R^2 - x^2$) è costante ($4R^2$); tale prodotto è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4R^2 - x^2}{1} \ , \qquad da\ cui: \ \ 3x^2 = 4R^2 \ , \qquad quindi \quad x = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}R\sqrt{3} < R\sqrt{2}$$

Quindi il tronco di cono con superficie laterale massima è quello di apotema $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$.

Usiamo il metodo delle derivate:

$y' = 4R^2 - x^2 + x(-2x) = -3x^2 + 4R^2 \geq 0 \quad se \quad 0 \leq x \leq 2R/\sqrt{3}$; la funzione è quindi crescente per $0 < x < 2R/\sqrt{3}$ e decrescente per $\frac{2R}{\sqrt{3}} < x < R\sqrt{2}$; per $x = 2R/\sqrt{3}$ si ha un massimo relativo (e assoluto): la conclusione è la stessa del metodo elementare.

QUESITO 2

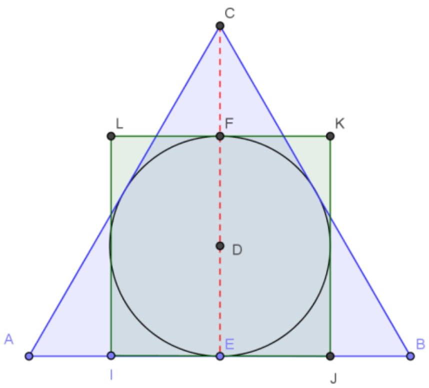
Si calcoli il limite della funzione $\frac{\ln(1+sen(3x))}{e^{tg(2x)}-1}$ *quando x tende a 0.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+sen(3x)\right)}{e^{tg(2x)}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+sen(3x)\right)}{tg(2x)\,\frac{e^{tg(2x)}-1}{tg(2x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+sen(3x)\right)}{tg(2x)\,\cdot 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot sen(3x)}{sen(2x)}\cdot\frac{\ln(1+sen(3x))}{sen(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1\cdot sen(3x)}{sen(2x)}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

QUESITO 3

Si dimostri che il volume di una sfera, il volume del cilindro circoscritto e il volume del cono equilatero circoscritto sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.



Detto R il raggio della sfera, si ha:

$$V(sfera) = V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\left(\frac{1}{3}\pi R^3\right)$$
$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi R^2\cdot 2R = 2\pi R^3 = 6\left(\frac{1}{3}\pi R^3\right)$$

Per calcolare il volume del cono equilatero osserviamo che il diametro di base è uguale all'apotema. Siccome DE è uguale ad R e CE (altezza e mediana del triangolo equilatero

ABC di cui D è il baricentro e l'incentro) è il triplo di DE, quindi 3R. Il raggio di base del cono è dato da: $AE = CE \cdot tg(30°) = R \cdot \sqrt{3}$. Si ha quindi:

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot AE^2 \cdot CE = \frac{1}{3}\pi \cdot 3R^2 \cdot 3R = 3\pi R^3 = 9\left(\frac{1}{3}\pi R^3\right)$$

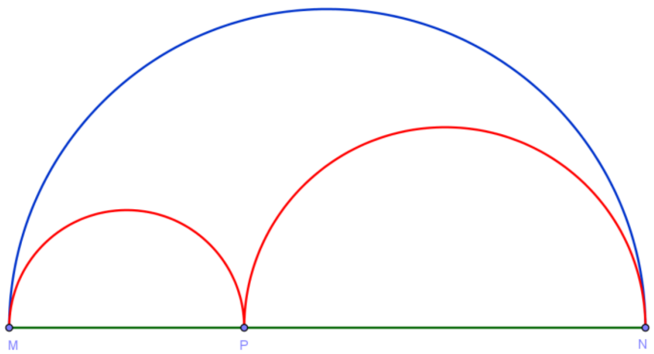
Posto $\frac{1}{3}\pi R^3 = k$, che è costante, essendo fissata la sfera, si ha quindi:

$V(sfera) = 4k, \qquad V(cilindro) = 6k\,, \quad V(cono) = 9k$

Quindi i tre volumi sono proporzionali a 4, 6 e 9.

QUESITO 4

Se P è un punto arbitrario del diametro MN di una data semicirconferenza, sui segmenti MP e NP, presi come diametri, si descrivano due semicirconferenze dalla stessa parte di quella data. Si dimostri che la figura (è detta arbelo) limitata dalle tre semicirconferenze, è equivalente al cerchio il cui diametro è medio proporzionale tra MP e NP.



Sia MN=2R, MP=2x, NP=2R-2x

Il medio proporzionale tra MP ed NP è il segmento di misura 2r tale che:

MP:2r=2r:NP, da cui: $4r^2 = MP \cdot NP = 2x(2R - 2x)$, $r^2 = \frac{2x(2R-2x)}{4}$; il cerchio il cui diametro è medio proporzionale tra MP e NP ha area: $\pi r^2 = \pi \frac{2x(2R-2x)}{4} = \frac{1}{2}\pi x(2R - 2x)$.

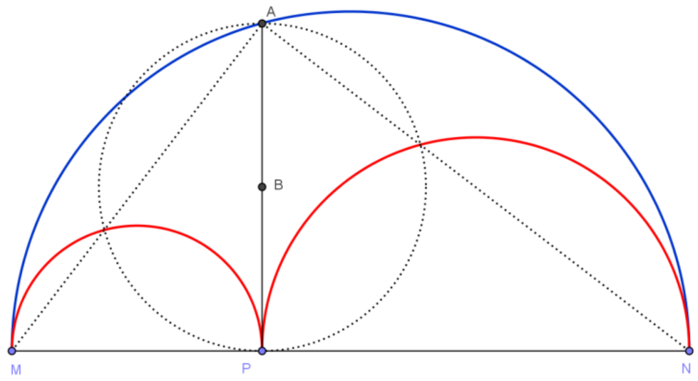
L'area dell'arbelo è:

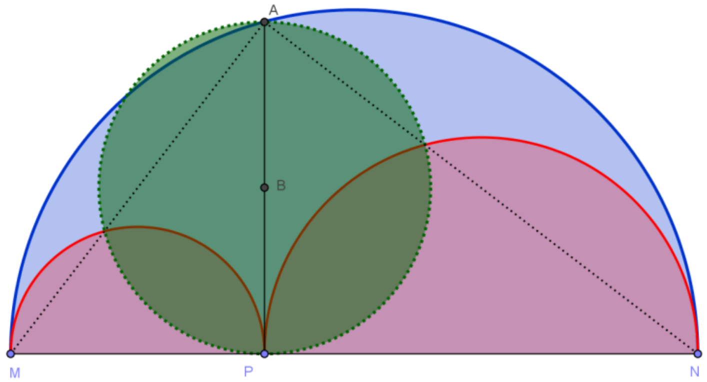
A(semicerchio diametro MN)- A(semicerchio diametro MP)-A(semicerchio diametro NP)=

$$= \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{2}\pi(R - x)^2 = \frac{1}{2}\pi(R^2 - x^2 - R^2 - x^2 + 2Rx) = \frac{1}{2}\pi(2Rx - 2x^2) =$$

$= \frac{1}{2}\pi x(2R - 2x)$ = area cerchio di diametro medio proporzionale tra MP ed NP.

Nelle figure seguenti è rappresentato il cerchio il cui diametro AP è medio proporzionale tra MP ed NP; infatti, per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo MAN risulta: $AP^2 = MP \cdot NP$. L'area dell'arbelo è uguale all'area di questo cerchio.





QUESITO 5

Si determini il valore medio della funzione $f(x) = \sqrt{2x-1}$ *nell'intervallo* $4 \leq x \leq 6$.

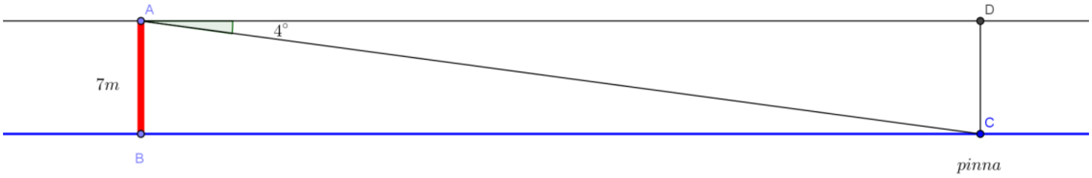
Ricordiamo che il valor medio di una funzione f(x) continua in un intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6-4} \cdot \int_4^6 \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{4}\int_4^6 2(2x-1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_4^6 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\left[(11)^{\frac{3}{2}} - (7)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{6}\left(11\sqrt{11} - 7\sqrt{7}\right) \cong 2.99$$

QUESITO 6

Un bagnino è seduto su un'alta piattaforma, di modo che i suoi occhi si trovano a 7 metri sopra il livello del mare. Improvvisamente emerge in superficie la pinna di un grande squalo bianco. Se l'angolo di depressione è di 4°, si stimi la distanza orizzontale tra la piattaforma e lo squalo, arrotondando il risultato all'unità.



La distanza orizzontale è BC e risulta:

$BC = AB \cdot tg(86°) = 7 \cdot tg(86°)\ \ m \cong 100\ m$

La distanza orizzontale tra la piattaforma e lo squalo è di circa 100 metri.

QUESITO 7

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & per \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 13 & per \quad 2 < x \leq 3 \end{cases} .$$

È applicabile ad essa, nell'intervallo chiuso [0, 3], il teorema di Lagrange?

Analizziamo il punto "critico" x=2 dal punto di vista della derivabilità.
Nel dominio della funzione risulta:

se x<2: $f'(x) = 3x^2, \quad quindi \quad f'_-(2) = 12$

se x>2: $f'(x) = -2x, \quad quindi \quad f'_+(2) = -4$

La funzione non è quindi derivabile per x=2.

Il teorema di Lagrange non è quindi applicabile nell'intervallo chiuso [0, 3] poiché la funzione non è derivabile in tutto l'aperto (0, 3).

QUESITO 8

Si risolva l'equazione:

$$6\left[\binom{x}{2}+\binom{x}{3}\right]=x(x+11)\,.$$

Cominciamo con osservare che deve essere x numero intero positivo e non inferiore a 3. Sviluppiamo l'espressione:

$$6\left[\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\right]=x^2+11x$$

$$3x(x-1)+x(x-1)(x-2)-x^2-11x=0$$

$$x^3-x^2-12x=0;\quad x(x^2-x-12)=0:\quad x=0,\qquad x=4,\qquad x=-3$$

Tenendo conto delle condizioni l'unica soluzione è x=4.

QUESITO 9

Il $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ *vale 0. Si dica se quest'affermazione è vera o falsa e si fornisca un'esauriente spiegazione della risposta.*

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, essendo la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica con primo termine 1 e ragione1; ricordiamo che in generale si ha:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

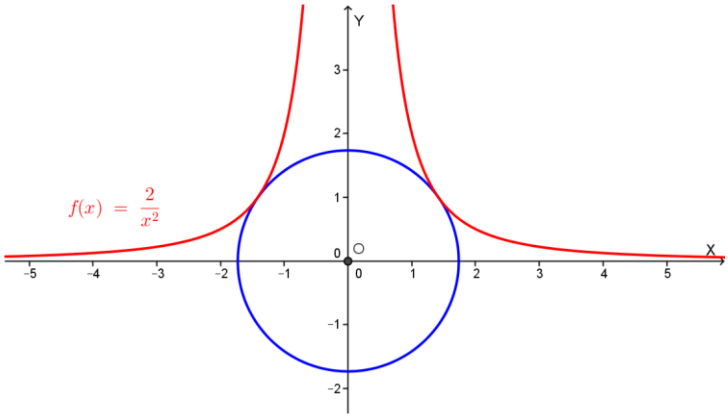
Quindi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

QUESITO 10

Quali punti del grafico della funzione $f(x)=\frac{2}{x^2}$ *hanno distanza minima dall'origine?*

Il grafico della funzione è il seguente:



I punti del grafico della funzione che hanno minima distanza dall'origine appartengono alla circonferenza con centro nell'origine tangente alla curva.

Indichiamo con $P = \left(x; \frac{2}{x^2}\right)$ il generico punto del grafico di f(x); PO è minima se lo è

$$PO^2 = x^2 + \frac{4}{x^4} = z$$

Metodo delle derivate (vista la simmetria della curva possiamo limitarci ad x>0):

$z = x^2 + \frac{4}{x^4}$, $z' = 2x - \frac{16}{x^5} \geq 0$ $\quad se \ \ x^6 - 8 \geq 0$, $x \geq \sqrt[6]{8}$, $x \geq \sqrt{2}$; la funzione. Limitandoci ad x>0 è quindi crescente se $x > \sqrt{2}$ e decrescente se $0 < x < \sqrt{2}$; abbiamo quindi un minimo relativo (ed assoluto) per $x = \sqrt{2}$. Osserviamo che per tale valore di x risulta $z = 2 + \frac{4}{4} = 3$, quindi la minima distanza dall'origine è $\sqrt{3}$.

I punti del grafico di f(x) che hanno minima distanza dall'origine sono quelli di ascissa $x = \pm\sqrt{2}$, quindi: $\left(\pm\sqrt{2}; 1\right)$.

Osserviamo che la circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt{3}$ ha equazione:

$x^2 + y^2 = 3$; intersechiamola con la curva di equazione data per verificare che effettivamente è tangente:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x^2} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad , \quad \frac{2}{y} + y^2 = 3 \ , \quad y^3 - 3y + 2 = 0 \, , che \ si \ abbassa \ di \ grado \ con \ y = 1:$$

$y^3 - 3y + 2 = 0 \ \Rightarrow \ (y-1)(y^2 + y - 2) = 0$, $(y-1)^2(y+2) = 0$ quindi le due curve hanno per y=1 una radice doppia, pertanto sono tangenti.

Con la collaborazione di Angela Santamaria