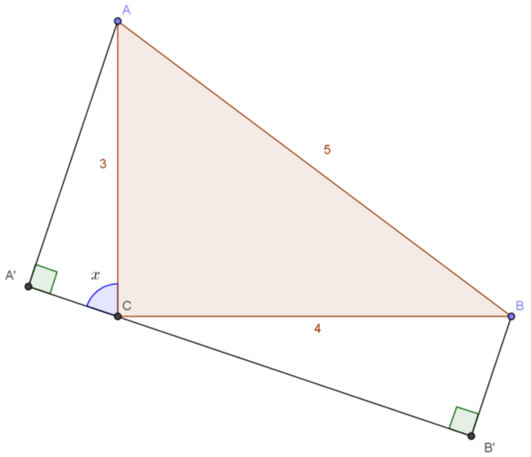
PNI 2009 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, di cateti 3 e 4, si consideri una retta passante per C, non secante il triangolo e formante un angolo x con il cateto AC.

1)

Dette A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B su tale retta, si esprima mediante $t = tg(x/2)$ *il perimetro y del quadrilatero AA'B'B, controllando che risulta:*

$$y = \frac{-2t^2 + 14t + 12}{t^2 + 1}\ .$$



Indicato con x l'angolo ACA', essendo la retta per C esterna al triangolo, risulta:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre, essendo l'angolo CBB'=x

$$AA' = 3senx, \qquad A'C = 3cosx\ ,$$
$$B'C = 4senx, \qquad BB' = 4cosx$$

Il perimetro y del quadrilatero AA'B'B è quindi:

$$y = AA' + A'C + CB' + B'B + BA = 2senx + 3cosx + 4senx + 4cosx + 5 =$$

$$= 7senx + 7cosx + 5 = 7 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 7 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 = \frac{14t + 7 - 7t^2 + 5 + 5t^2}{1+t^2}$$

Quindi:

$$y = \frac{-2t^2 + 14t + 12}{t^2 + 1}\ .$$

2)

Si studi e si rappresenti graficamente tale funzione.

$$y = \frac{-2t^2 + 14t + 12}{t^2 + 1}$$

Essendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ si ha $0 < x/2 < \frac{\pi}{4}$ quindi: $0 < t < 1$.

Studiamo la funzione a prescindere dai limiti geometrici; metteremo poi in evidenza la parte del grafico che rispetta i limiti geometrici.

Dominio:

La funzione è definita su tutto R e non è pari né dispari

Intersezioni con gli assi:

Se t=0: y=12 ; se y=0: $-2t^2 + 14t + 12 = 0$, $t^2 - 7t - 6 = 0$, $t = \frac{7-\sqrt{73}}{2} \cong -0.8$ e $t = \frac{7+\sqrt{73}}{2} \cong 7.8$

Positività:

La funzione è positiva se $-2t^2 + 14t + 12 > 0$, $t^2 - 7t - 6 < 0$, $\frac{7-\sqrt{73}}{2} < t < \frac{7+\sqrt{73}}{2}$.

Limiti:

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{-2t^2 + 14t + 12}{t^2 + 1} = -2;$$

Asintoti:

La funzione è continua su tutto R: non ci sono asintoti verticali.
Dal precedente calcolo dei limiti si deduce che c'è l'asintoto orizzontale $y = -2$ per $x \to \pm\infty$, quindi non ci possono essere asintoti obliqui.

Derivata prima:

$$y' = \frac{14 - 28t - 14t^2}{(\mathrm{t}^2 + 1)^2} \geq 0 \quad se \quad 14 - 28t - 14t^2 \geq 0 \ , \ 2t^2 + 4t - 2 \leq 0 \ ,$$

$-\sqrt{2} - 1 \leq t \leq -1 + \sqrt{2}$;

la funzione è crescente se $-\sqrt{2}-1<t<-1+\sqrt{2}$ e decrescente se $t<-1-\sqrt{2}$ e $t>-1+\sqrt{2}$; $t=-1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo (e assoluto), e $t=-1+\sqrt{2}$ è punto di massimo relativo (e assoluto). Ordinata minimo $\cong -4.9$, ordinata massimo $\cong 14.9$

Derivata seconda:

$$y''=\frac{28t^3+84t^2-84t-28}{(t^2+1)^3}\geq 0 \quad se \quad 28t^3+84t^2-84t-28\geq 0\ ,$$

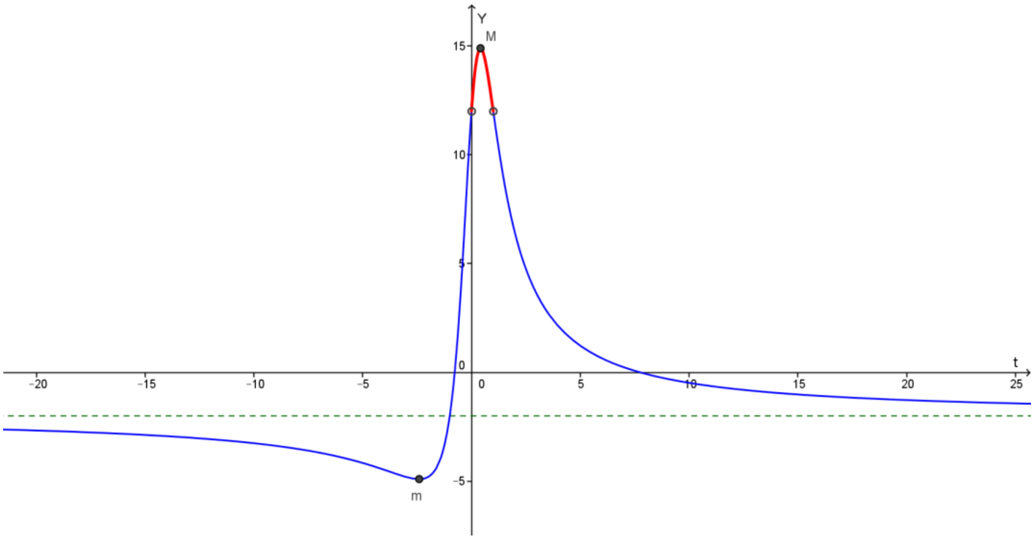
$$28(t-1)(t^2+4t+1)\geq 0\ ,\ \ t\geq 1\ or\ -2-\sqrt{3}\leq t\leq -2+\sqrt{3}\ .$$

Concavità verso l'alto se $-2-\sqrt{3}<t<-2+\sqrt{3}\ \ or\ \ t>1$, verso il basso se

$t<-2-\sqrt{3}\ \ or\ \ -2+\sqrt{3}<t<1$

Punti di flesso: $t=-2-\sqrt{3}\,,t=-2+\sqrt{3}\,,t=1$

Grafico della funzione (è evidenziato il tratto che rispetta i limiti geometrici):



3)

Si esprima in funzione di $sin(2x)$ il rapporto tra l'area del quadrilatero AA'B'B e quella del triangolo dato e se ne tracci il grafico nell'intervallo di variabilità di x imposto dai limiti geometrici del problema.

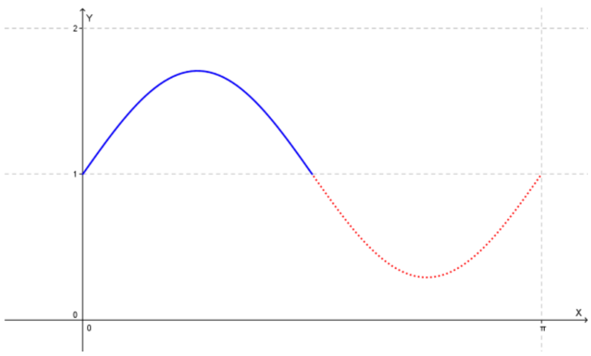
$$Area(AA'B'B)=\frac{(AA'+BB')A'B'}{2}=\frac{(3senx+4cosx)(3cosx+4senx)}{2}$$

$$Area(ABC)=\frac{3\cdot 4}{2}=6$$

$$\frac{Area(AA'B'B)}{Area(ABC)}=\frac{(3senx+4cosx)(3cosx+4senx)}{12}=$$
$$=\frac{1}{12}(17senxcosx+12sen^2x+12\cos^2 x)=\frac{1}{12}\left(\frac{17}{2}sen2x+12\right)=\frac{17}{24}sen2x+1$$

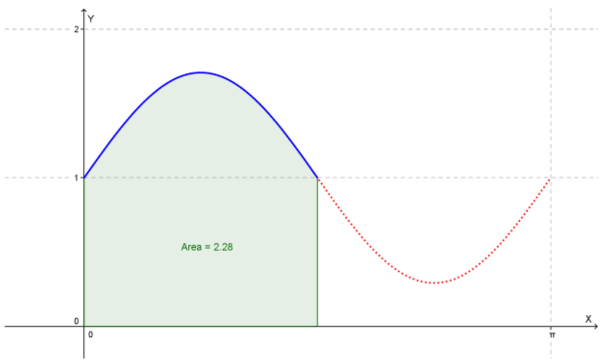
La funzione $y=\frac{17}{24}sen2x+1$ è una funzione sinusoidale di periodo $T=\pi$, ampiezza $\frac{17}{24}$ e traslata di 1 nel verso positivo dell'asse y:

Grafico della funzione con evidenziato il tratto relativo alla limitazione $0<x<\frac{\pi}{2}$:



4)

Si calcoli l'area sottesa da quest'ultima curva nel suddetto intervallo.



L'area della superficie sottesa nell'intervallo $0<x<\frac{\pi}{2}$ si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{17}{24}sen2x+1\right)\,dx=\frac{17}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sen2x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)\,dx=\frac{17}{24}\left[-\frac{1}{2}cos2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{17}{48}(-1-1)+\frac{\pi}{2}=\left(\frac{17}{24}+\frac{\pi}{2}\right)\,u^2\cong 2.28\,u^2=Area\,.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria