PNI 2009 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita da $f(x) = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}$.

1)

Si studi f e se ne tracci il grafico γ *su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.*

Dominio:

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \,, \quad -1 < x < 1$$

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=0 ; se y=0: $\frac{1+x}{1-x} = 1 \,, \; x = 0$

Positività:

La funzione è positiva se $\frac{1+x}{1-x} > 1$, $\frac{1+x-1+x}{1-x} > 0$, $\frac{2x}{1-x} > 0$: $0 < x < 1$.

La funzione potrebbe essere dispari. Verifichiamolo:

$f(-x) = \frac{1}{2} ln \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$: la funzione è dispari.

Limiti:

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} = -\infty; \qquad \lim_{x\to(1)^-} \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} = +\infty;$$

Asintoti:

La funzione ha due asintoti verticali: x=-1 e x=1.

Derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \quad se \quad (x-1)(x+1) < 0 \,, \qquad -1 < x < 1$$

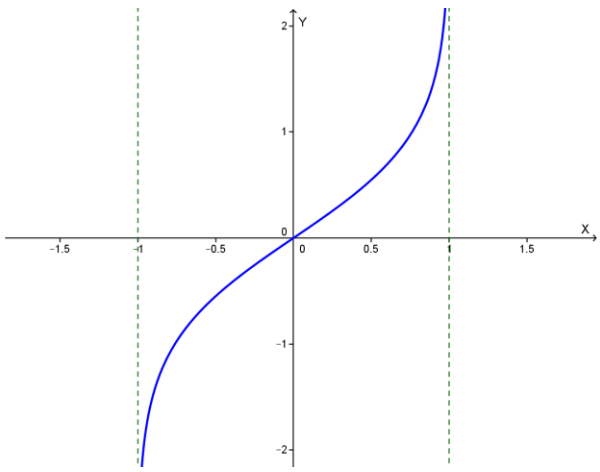
La funzione è sempre crescente in senso stretto, non ha massimi né minimi.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x}{(\mathrm{x}^2-1)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 0$$

Concavità verso l'alto se $x > 0$, verso il basso se $x > 0$, x=0 è punto di flesso, con tangente inflessionale di coefficiente angolare 1.

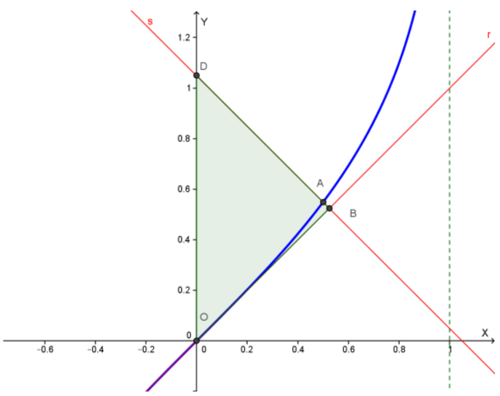
Grafico della funzione:



2)

Si considerino la retta r tangente a γ nel punto di flesso e la retta s, perpendicolare a r, condotta dal punto di γ di ascissa 1/2. Si calcoli l'area del triangolo formato da r, da s e dall'asse y.

La tangente nel punto di flesso è la retta r di equazione y=x. La retta s, perpendicolare ad r per il punto della curva di ascissa ½ ha equazione:



$$s: y - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad y - \frac{1}{2}ln3 = -x + \frac{1}{2},$$

$$y = -x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln3$$

Cerchiamo l'intersezione B fra r ed s:

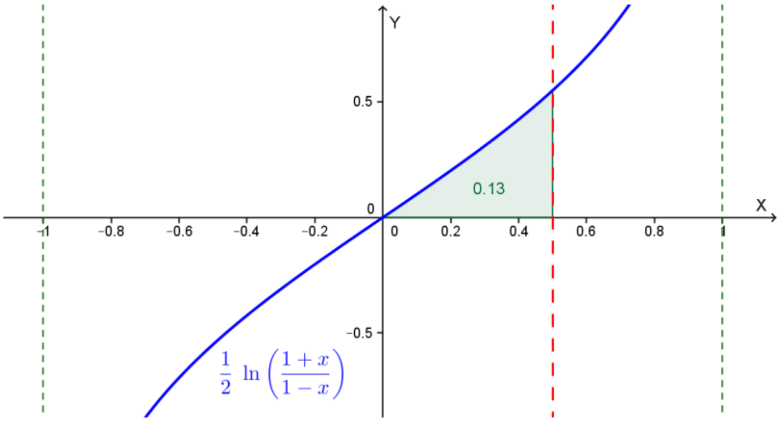
$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln3 \end{cases}, \quad x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}ln3 = y$$

Il triangolo richiesto OBD ha quindi area:

$$Area(OBD) = \frac{1}{2} y_D \cdot x_B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln3\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} ln3\right) = \frac{1}{16}(1 + ln3)^2\, u^2 \cong 0.28\, u^2 = Area$$

3)

Si calcoli l'area della superficie piana delimitata da γ, dall'asse x e dalla retta di equazione x = 1/2.



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x)\, dx$$

Calcoliamo le primitive necessarie (integrando per parti):

$$\int \ln(1+x)\, dx = \int (x)' \ln(1+x)\, dx = x\ln(1+x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x}\, dx =$$

$$= x\ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x}\, dx = x\ln(1+x) - \int dx + \int \frac{1}{x+1}\, dx = x\ln(1+x) - x + ln|x+1|$$

Per calcolare la seconda primitiva operiamo la sostituzione –x=t da cui dx=-dt:

$$\int \ln(1-x)\, dx = -\int \ln(1+t)\, dt = -(t\ln(1+t) - t + ln|t+1|) =$$

$$= xln(1-x) - x - ln|1-x|$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1+x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x\ln(1+x)-x+ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\left[xln(1-x)-x-ln|1-x|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{4}ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}ln3-\frac{3}{4}ln2-\frac{1}{4}ln2=\left(\frac{3}{4}ln3-ln2\right)\,u^2\cong 0.13\,u^2=Area$$

4)

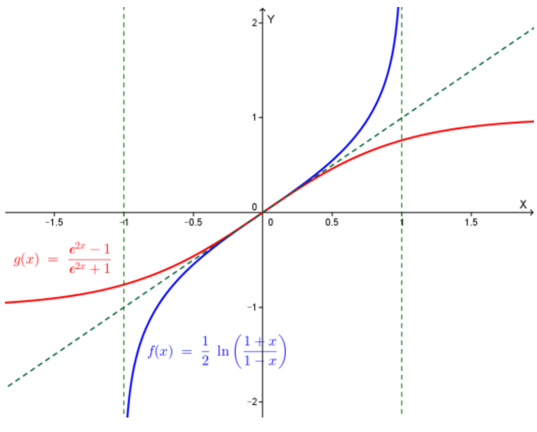
Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica x = g (y) della funzione g inversa di f .

Dallo studio della funzione f emerge che essa è strettamente crescente in tutto il suo dominio, e questa condizione è sufficiente (ma non necessaria) per l'invertibilità. Ricaviamo l'espressione analitica della funzione inversa:

$$y=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}\ ,\quad 2y=ln\frac{1+x}{1-x}\ ,\quad e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}\ ,\quad e^{2y}-x\,e^{2y}-1-x=0\ ,$$

$$x(-1-e^{2y})=1-e^{2y}\ ,\quad x=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}=g(y)=f^{-1}(y)$$

Ricordiamo che le funzioni $y=f(x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$ e $x=f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$ hanno lo stesso grafico; la funzione $y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, ottenuta scambiando la x con la y, ha il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante rispetto alla funzione f:



Con la collaborazione di Angela Santamaria