Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione f definita da:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^{3x}}.$$

a) Si studi f e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.

c) Si provi che la funzione

$$F(x) = -\frac{1}{9}e^{-3x}(3x+4)$$

è una primitiva della funzione $f(x)$.

d) Si calcoli l'area $A(k)$ della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x = -1$ e $x = k$ con $k > 0$. Cosa si può dire di $A(k)$ quando $k \to +\infty$?

Problema 2

Sia $f(x) = a\cos^3 x + b\cos x + c$ e $x \in \mathbb{R}$.

a) Si determinino a, b, c in modo che risulti

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad f(\pi) = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad f''(\pi) = 0.$$

b) Si studi, nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$, la funzione così trovata e se ne tracci il grafico γ.

c) Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a γ nei due punti di flesso.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata da γ e dall'asse delle ascisse.

Questionario

1. Si inscriva in una semisfera di raggio r il tronco di cono di massima superficie laterale, avente la base maggiore coincidente con quella della semisfera. Si assuma come incognita l'apotema del tronco di cono.

2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{\ln(1+\sin(3x))}{e^{\tan(2x)}-1}$$
quando x tende a 0.

3. Si dimostri che il volume di una sfera, il volume del cilindro circoscritto e il volume del cono equilatero circoscritto sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.

4. Se P è un punto arbitrario del diametro $\overline{MN}$ di una data semicirconferenza, sui segmenti $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$, presi come diametri, si descrivano due semicirconferenze dalla stessa parte di quella data.

   Si dimostri che la figura (è detta *arbelo*) limitata dalle tre circonferenze, è equivalente al cerchio il cui diametro è medio proporzionale tra $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$.

5. Si determini il valore medio della funzione $f(x) = \sqrt{2x-1}$ nell'intervallo $4 \le x \le 6$.

6. Un bagnino è seduto su un'alta piattaforma, di modo che i suoi occhi si trovano a 7 metri sopra il livello del mare. Improvvisamente emerge in superficie la pinna di un grande squalo bianco. Se l'angolo di depressione è di 4°, si stimi la distanza orizzontale tra la piattaforma e lo squalo, arrotondando il risultato all'unità.

7. Si consideri la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{per} \quad 0\leq x\leq 2 \\ -x^2+13 & \text{per} \quad 2<x\leq 3 \end{cases} .$$

È applicabile ad essa, nell'intervallo chiuso $[0,3]$, il teorema di Lagrange?

8. Si risolva l'equazione:

$$6\left[\binom{x}{2}+\binom{x}{3}\right]=x(x+11).$$

9. Il

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

vale 0. Si dica se quest'affermazione è vera o falsa e si fornisca un'esauriente spiegazione della risposta.

10. Quali punti del grafico della funzione

$$f(x)=\frac{2}{x^2}$$

hanno distanza minima dall'origine?