

ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione ordinaria 2011

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

(AMERICA- emisfero australe)¹

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = 3 \ln(e^2 - x).$$

- a) Si studi la funzione f e se ne tracci il grafico Γ .
- b) La funzione f è invertibile? Se sì, quale è la sua equazione? E quale il suo grafico? Si disegnino, successivamente, anche i grafici delle funzioni definite da

$$g(x) = 3 \ln |e^2 - x| \quad \text{e da} \quad h(x) = -g(x)$$

illustrando le eventuali loro simmetrie.

- c) Sia R la regione delimitata da Γ e dagli assi coordinati. Si calcoli l'area di R .
- d) La regione R è la base di un solido W che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni rettangolari di altezza 5. Si calcoli il volume W . Supposto, invece, che la regione R ruoti di un giro completo attorno alla retta $y = -6$, come si può calcolare il volume del solido che essa genera? Si indichi solo il procedimento senza risolvere eventuali integrali.

Problema 2

In un riferimento cartesiano Oxy si consideri la semicirconferenza γ , tangente nell'origine all'asse y , passante per il punto $A(2, 0)$ e appartenente al primo quadrante.

- a) Sia X un punto del diametro \overline{OA} , distinto da O , Q il punto di γ avente la stessa ascissa di X e B il punto in cui la semiretta OQ incontra la tangente in A alla semicirconferenza. Sia P un punto della semiretta XQ tale che i due triangoli OPX e OQA abbiano uguale area. Qual è la posizione limite di P quando X tende a O ? E quando tende ad A ? Sia P_1 la posizione di P quando $\widehat{AOQ} = \pi/6$; si determinino le coordinate di P_1 .
- b) Si provi che il luogo geometrico Γ descritto da P , al variare di X su \overline{OA} , è il ramo, appartenente al primo quadrante, della curva di equazione

$$xy^2 + 4x - 8 = 0.$$

- c) Si disegni Γ .
- d) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione piana limitata dalla retta OP_1 , da Γ e dall'asse x .

¹ Testo tratto da http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.pdf

Questionario

1. Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato.
2. Si consideri la regione R del primo quadrante del sistema di riferimento Oxy , delimitata dal grafico di $t = e^{-2x}$, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 3$. R è la base di un solido W che, tagliato con piani perpendicolari all'asse x , dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W .
3. Si calcoli l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 0$ a $x = 5$ e con l'aiuto di una calcolatrice se ne dia il valore arrotondato con tre cifre decimali.
4. Sia \overline{AB} un segmento di lunghezza 5 dm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che \widehat{ABC} sia retto e \widehat{BAC} misuri 60° .
5. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?
6. Si risolva l'equazione

$$\binom{x}{2} + 4 = \binom{x+1}{2}.$$

7. Si dica se

$$f(x) = \sin(x - \pi) + \cos(3x)$$

è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo.