Scuole italiane all'estero (America latina) 2011

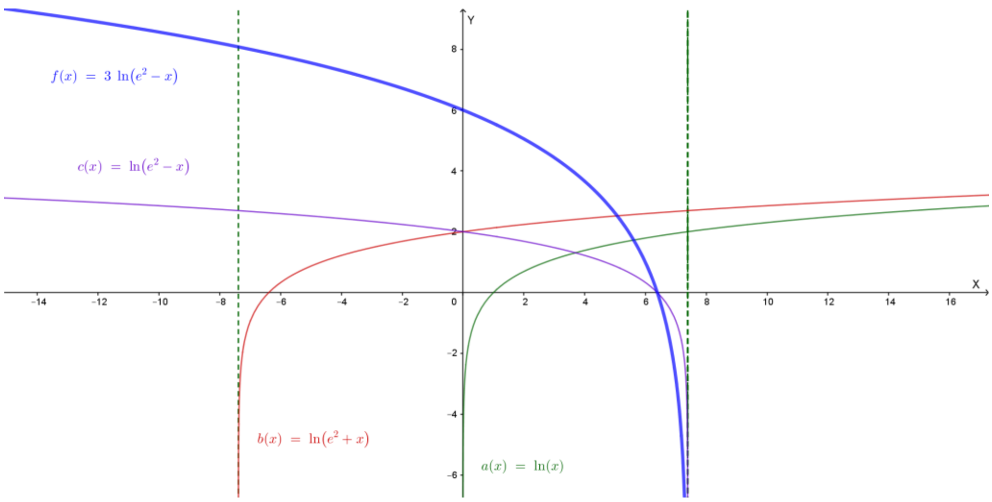
PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da $f(x) = 3\ln(e^2 - x)$.

a) *Si studi la funzione f e se ne tracci il grafico* Γ *.*

Il grafico della funzione si può ottenere mediante trasformazioni geometriche elementari a partire dal grafico di $y = \ln x$. Indichiamo i passaggi necessari:

1) $a(x) = \ln x$
2) $b(x) = \ln(e^2 + x):\ \ traslazione\ di\ vettore\ \ (-e^2; 0)$
3) $c(x) = \ln(e^2 - x):\ \ simmetria\ rispetto\ all'asse y$
4) $f(x) = 3\ln(e^2 - x):\ \ dilatazione\ verticale\ di\ fattore\ 3$



La funzione ha l'asintoto verticale di equazione $x = e^2$. Il grafico interseca gli assi cartesiani nei punti di coordinate $(0; 6)$ e $(e^2 - 1; 0)$.

b)

La funzione f è invertibile? Se sì, quale è la sua equazione? E quale il suo grafico? Si disegnino, successivamente, anche i grafici delle funzioni definite da

$$g(x) = 3\ln|e^2 - x| \quad e \quad da \quad h(x) = -g(x)$$

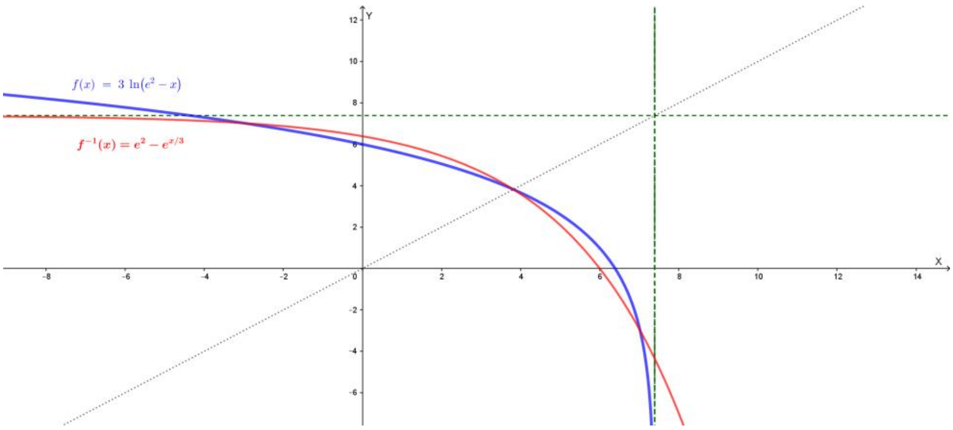
illustrando le eventuali loro simmetrie.

La funzione è strettamente decrescente, quindi è invertibile. Ricaviamo la sua equazione:

$y = 3\ln(e^2 - x)$, $e^2 - x = e^{\frac{y}{3}}$, $x = e^2 - e^{\frac{y}{3}}$.

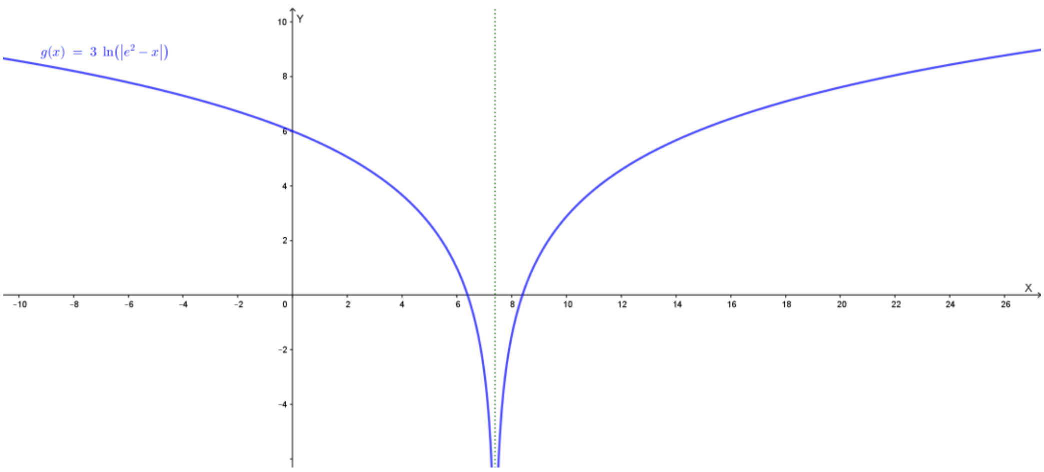
La funzione inversa di $y = 3\ln(e^2 - x)$ ha equazione $y = e^2 - e^{\frac{x}{3}}$.

Il grafico della funzione inversa è simmetrico rispetto alla retta y=x del grafico della funzione f stessa. Asintoto orizzontale $y = e^2$, intersezioni con gli assi: $(6; 0)$ e $(0; e^2 - 1)$.



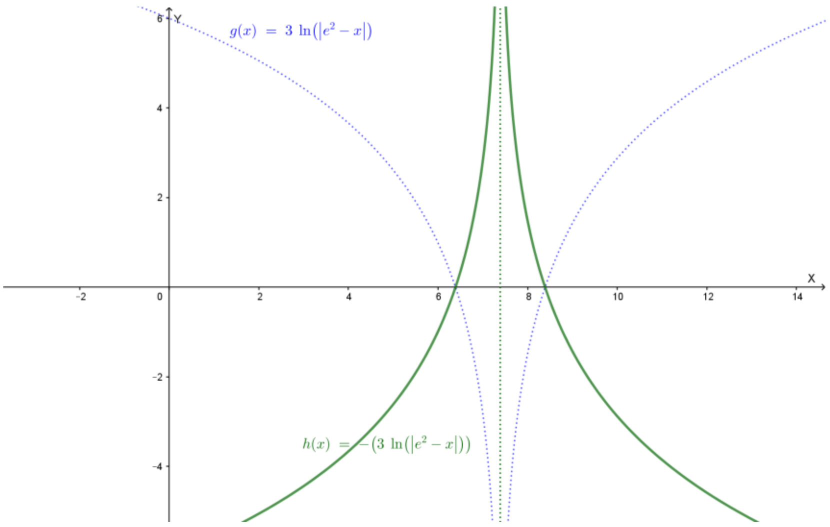
Il grafico della funzione $g(x) = 3\ln|e^2 - x|$ si può ottenere mediante trasformazioni geometriche elementari a partire dal grafico di $y = \ln x$. Indichiamo i passaggi necessari:

1) $a(x) = \ln x$
2) $b(x) = \ln|x|$: si conferma il grafico di a(x) a destra dell'asse y e lo si ribalta a sinistra
3) $c(x) = \ln|e^2 + x|$: $traslazione\ di\ vettore\ (-e^2; 0)$
4) $d(x) = \ln|e^2 - x|$: $simmetria\ rispetto\ all'asse y$
5) $g(x) = 3\ln|e^2 - x|$: $dilatazione\ verticale\ di\ fattore\ 3$



Asintoto verticale: $x = e^2$, intersezioni con gli assi: $(0; 6)$, $(e^2 - 1; 0)$, $(e^2 + 1; 0)$.

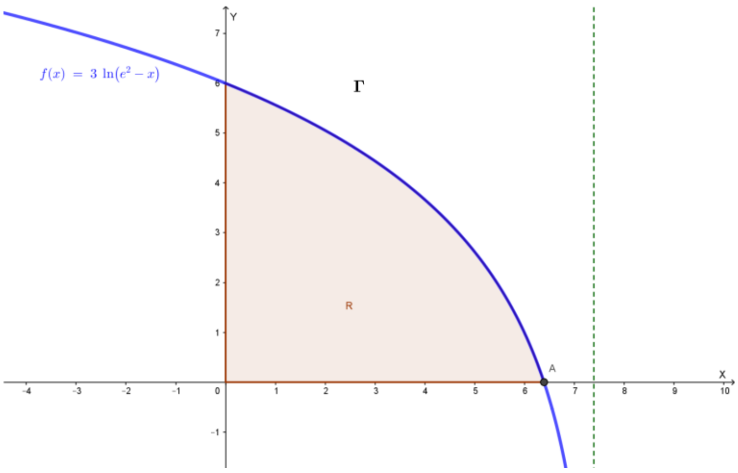
Il grafico di $h(x) = -g(x)$ si ottiene da quello di g con una simmetria rispetto all'asse x:



c)

Sia R la regione delimitata da Γ e dagli assi coordinati. Si calcoli l'area di R.

Rappresentiamo la regione R:



Troviamo l'ascissa del punto di intersezione fra Γ e l'asse x:
$3\ln(e^2 - x) = 0,\ e^2 - x = 1,\ x = e^2 - 1$.

Quindi:

$$Area(R) = \int_0^{e^2-1} 3\ln(e^2 - x)\,dx$$

Cerchiamo una primitiva di $f(x) = 3\ln(e^2 - x)$ integrando per parti:

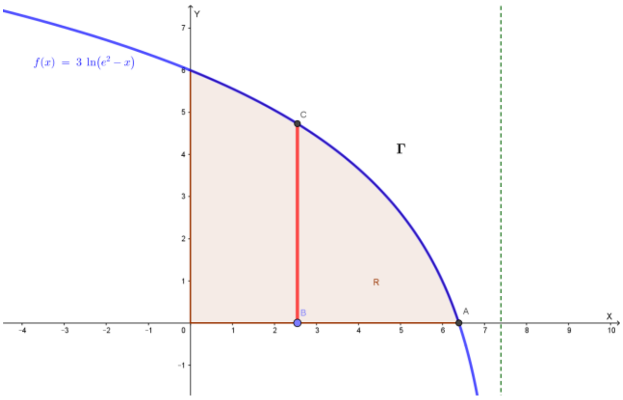
$$\int 3\ln(e^2-x)\,dx = 3\int 1\cdot\ln(e^2-x)\,dx = 3\int (x)'\ln(e^2-x)\,dx =$$
$$= 3\left[x\cdot\ln(e^2-x) - \int x\cdot\frac{-1}{e^2-x}\,dx\right] = 3\left[x\cdot\ln(e^2-x) - \int \frac{-x+e^2-e^2}{e^2-x}\,dx\right] =$$
$$= 3\left[x\cdot\ln(e^2-x) - \int\left(1+\frac{-e^2}{e^2-x}\right)dx\right] = 3\left[x\cdot\ln(e^2-x) - x - e^2\int\left(\frac{-1}{e^2-x}\right)dx\right] =$$
$$= 3\,x\cdot\ln(e^2-x) - 3x - 3e^2\ln|e^2-x|$$

Quindi:

$$Area(R) = \int_0^{e^2-1} 3\ln(e^2-x)\,dx = \left[3\,x\cdot\ln(e^2-x) - 3x - 3e^2\ln|e^2-x|\right]_0^{e^2-1} =$$
$$= 0 - 3(e^2-1) - (-3e^2\ln(e^2)) = -3e^2+3+3e^2(2) = (3+3e^2)\ u^2 \cong 25.17\ u^2$$

d)

La regione R è la base di un solido W che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni rettangolari di altezza 5. Si calcoli il volume di W.
Supposto, invece, che la regione R ruoti di un giro completo attorno alla retta $y=-6$, come si può calcolare il volume del solido che essa genera? Si indichi solo il procedimento senza risolvere eventuali integrali.



La generica sezione ha area $S(x) = f(x)\cdot 5$, quindi il volume di W è dato da:

$$V(W) = \int_0^{e^2-1} S(x)\,dx = \int_0^{e^2-1} 15\ln(e^2-x)\,dx = 5\int_0^{e^2-1} 3\ln(e^2-x)\,dx =$$

$$= 5(3+3e^2)\,u^3 = 15(1+e^2)\,u^3 \cong 125.836\ \ u^3 = V(W)$$

N.B. Il volume richiesto si può trovare anche come area di base per altezza, essendo assimilabile ad un prisma di base R ed altezza 5. Quindi:
$V(W) = Area(R)\cdot 5 = (3+3e^2)\cdot 5 = 15(1+e^2)\,u^3 = V(W).$

Supponiamo ora che la regione R ruoti intorno alla retta $y = -6$.

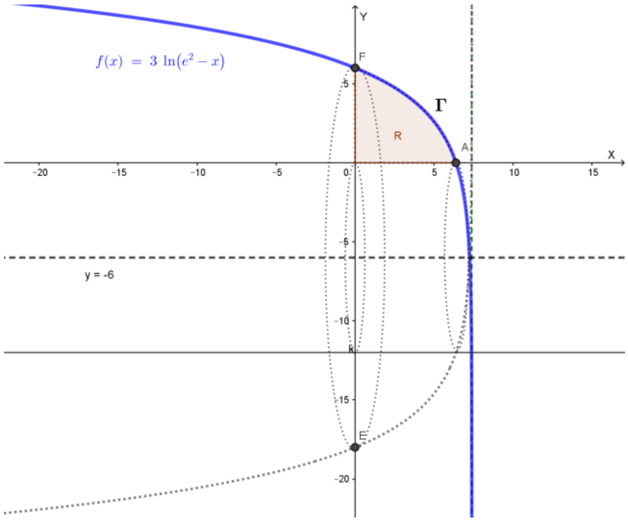
Il volume che si ottiene da tale rotazione si ottiene sottraendo all'integrale:

$$\pi \int_0^{e^2-1} [f(x)+6]^2 dx = \pi \int_0^{e^2-1} [3\ln(e^2-x)+6]^2 dx$$

il volume del cilindro con raggio di base 6 e altezza e^2-1, uguale a: $\pi \cdot 6^2 \cdot (e^2-1)$.

Il volume richiesto è quindi dato da:

$$V = \pi \int_0^{e^2-1} [3\ln(e^2-x)+6]^2 dx - 36\pi(e^2-1)$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria