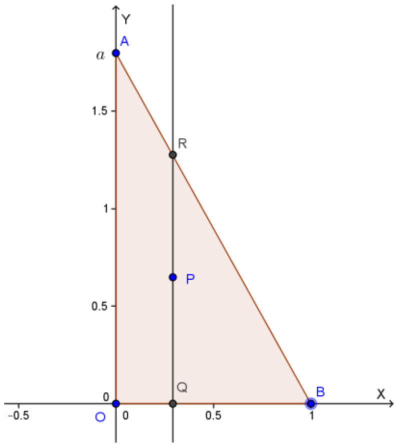
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2011 – PROBLEMA 1

Nel riferimento cartesiano Oxy si consideri il triangolo di vertici O, $B(1;\ 0), A(0;\ a)$, *con* $a\ >\ 0$. *Preso un punto P interno al triangolo, si denotino con Q e con R i punti in cui la retta per P, parallela all'asse y, taglia i lati OB e AB rispettivamente.*



1)

Si dimostri che il luogo dei punti P, interni al triangolo OBA, tali che QP : QR = OQ : OB è un arco della parabola Γ *d'equazione* $y = ax(1-x)$.

Poniamo $P=(s;t)$ $\quad con \quad 0<s<1 \quad e \quad 0<t<a$; dovendo inoltre essere P interno al triangolo OAB, deve essere sotto la retta AB, che ha equazione:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{a}=1,\ \ y=-ax+a\,.$$

Deve quindi essere: $t<-as+a$.

La proporzione QP : QR = OQ : OB diventa:

$$t:(-as+a)=s:1\ ,\quad t=s(-as+a)=as(1-s).$$

Ponendo s=x e t=y otteniamo: $y=\ ax(1-x)$, con le condizioni:

$$0<s<1\,,\quad 0<t<a\,,\qquad t<-as+a,\qquad a>0$$

Quindi il luogo descritto da P è un arco della parabola di equazione $y=\ ax(1-x)$.

2)

Si verifichi che il lato BA del triangolo e la mediana ad esso relativa sono tangenti a Γ rispettivamente in B e in O.

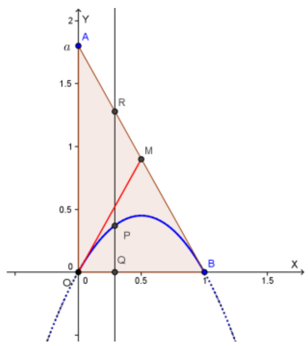
Il lato BA fa parte della retta di equazione $y = -ax + a$. Dimostriamo che questa retta è tangente a Γ in B; è immediato verificare che la retta e la parabola passano per B. Verifichiamo che sono tangenti:

$$\begin{cases} y = -ax + a \\ y = ax(1-x) \end{cases}, \quad -ax + a = ax(1-x), \quad ax^2 - 2ax + a = 0, \quad x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$(x-1)^2 = 0$: $x = 1\ radice\ doppia$. Quindi le due curve sono tangenti in B=(1; 0).

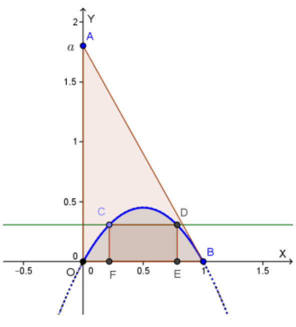
Scriviamo l'equazione della mediana relativa ad AB. Il punto medio M di AB ha coordinate: $M = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}a\right)$. La retta OM ha equazione: $y = ax$; verifichiamo che è tangente alla parabola:

$\begin{cases} y = ax \\ y = ax(1-x) \end{cases}$, $ax = ax(1-x),\ x = x - x^2, x^2 = 0: x = 0\ \ doppia$: quindi la mediana e la parabola sono tangenti in O.



3)

Si denoti con Ω la regione delimitata da Γ e da OB. In Ω, si inscriva un rettangolo con un lato su OB; si stabilisca per quale valore di a il rettangolo di perimetro massimo risulta essere un quadrato.



Equazione parabola: $y = ax(1-x) = -ax^2 + ax$

Il vertice della parabola ha ascissa: $x_V = \frac{1}{2}$. Indichiamo con x l'ascissa di E, con $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. La base del rettangolo CDEF è:

$$EF = 2\left(x_E - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1$$

L'altezza DE del rettangolo vale: $DE = ax(1-x)$.

L'area del rettangolo è quindi:

$Area(CDEF) = (2x-1)ax(1-x) = ax(-2x^2+3x-1) = A$

Calcoliamo la derivata prima:

$A' = a(-2x^2+3x-1) + ax(-4x+3) = -6ax^2+6ax-a \geq 0 \quad se \quad 6x^2-6x+1 \leq 0$,

$-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}$; la funzione è quindi crescente se $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2} \cong 0.8$ e decrescente se $\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2} < x < 1$: l'area è quindi massima se $x = \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}$.
Per tale valore di x risulta:

$EF = 2x-1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad ED = ax(1-x) = a\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = a\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}a$

Il rettangolo è un quadrato se $EF = ED$, quindi:

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6}a, \qquad a = 2\sqrt{3}$

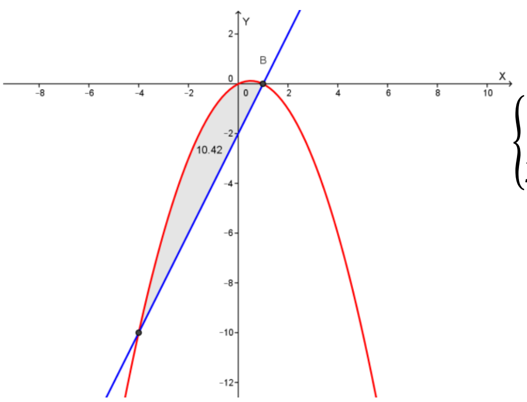
4)

Posto $a = \frac{1}{2}$, si indichi con r la retta ortogonale a Γ nel punto B. Si calcoli l'area racchiusa tra r e Γ e si calcoli altresì il volume del solido generato da Ω nella rotazione attorno alla retta $y = -1$.

Con $a = \frac{1}{2}$ la parabola ha equazione $y = \frac{1}{2}x(1-x)$
Cerchiamo il coefficiente angolare m della tangente alla parabola in B.

La derivata di $y = \frac{1}{2}x(1-x)$ è $y' = \frac{1}{2}-x$, quindi $m = y'(1) = -\frac{1}{2}$.
Il coefficiente angolare di r è pertanto 2. La retta r, passante per B=(1; 0) è quindi:

$r\!: \; y = 2(x-1)$.



Cerchiamo l'intersezione fra la parabola e la retta:

$\begin{cases} y = 2(x-1) \\ y = \frac{1}{2}x(1-x) \end{cases}, \quad 4(x-1) = -x(x-1)$:

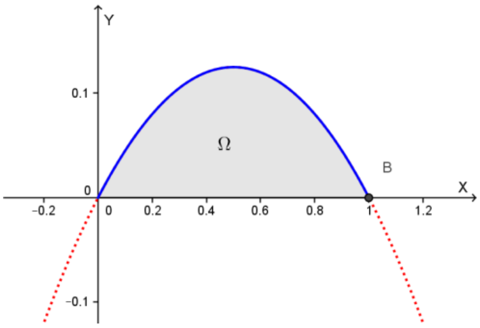
$x = 1 \; e \; x = -4$

L'area racchiusa fra r e Γ è quindi data da:

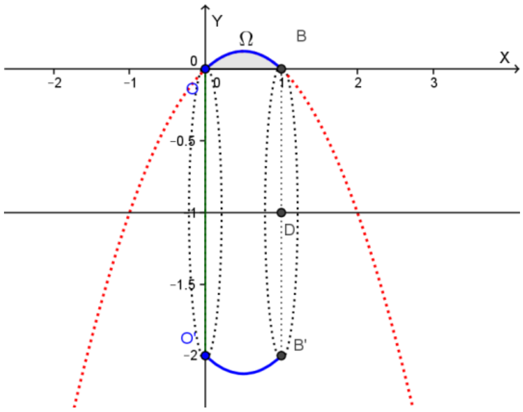
$$Area = \int_{-4}^{1}\left[\frac{1}{2}x(1-x) - 2(x-1)\right]dx = \int_{-4}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2\right)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x\right]_{-4}^{0}$$

$$Area = \frac{125}{12}\,u^2 \cong 10.42\,u^2$$

Rappresentiamo la regione Ω delimitata da Γ e da OB:



Rappresentiamo il solido che si ottiene facendo ruotare Ω attorno alla retta $y = -1$.



Eseguendo la traslazione che porta retta $y = -1$ nell'asse x (come dire che l'asse x va nella retta $y = -1$) l'equazione della parabola diventa:

$y = \frac{1}{2}x(1-x) + 1 = f(x)$ e l'asse x diventa $y = 1 = g(x)$.

Il volume richiesto è quindi dato da:

$$V = \pi\int_0^1 \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx = \pi\int_0^1\left(\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2 - 1\right)dx =$$

$$= \pi\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x - x^2\right)dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{7}{40}\pi\right)u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria