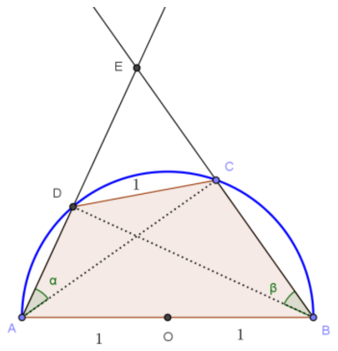
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2011 – PROBLEMA 2

In una semicirconferenza di diametro AB di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso ABCD avente il lato CD uguale al raggio. I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano in un punto E.



1)

Si dimostri che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza, si ha:

$$D\hat{A}C = D\hat{B}C = \frac{\pi}{6} \quad e \quad A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$$

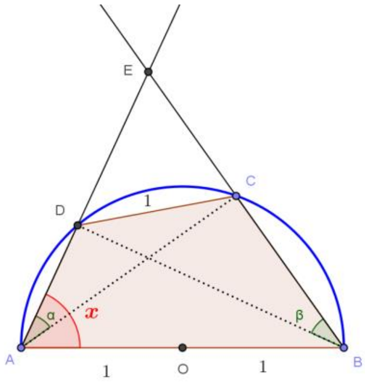
Essendo CD il lato dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza, gli angoli DAC e DBC (uguali perché insistono sullo stesso arco CD) misurano $\frac{\pi}{6}$. Allo stesso risultato si può giungere applicando il teorema della corda:

$$CD = 2Rsen(\alpha), 1 = 2sen(\alpha),\ \ sen(\alpha) = \frac{1}{2} : \alpha = \frac{\pi}{6}$$
$$CD = 2Rsen(\beta), 1 = 2sen(\beta),\ \ sen(\beta) = \frac{1}{2} : \beta = \frac{\pi}{6}$$

Osserviamo che AC è perpendicolare a BE, essendo il triangolo ACB inscritto in una semicirconferenza. Nel triangolo rettangolo ACE l'angolo in E è quindi complementare dell'angolo α , pertanto $A\hat{E}C = A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$.

2)

Se $x = D\hat{A}B$, si provi che la somma $CE + DE$ in funzione di x è data da $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$. Quale è l'intervallo di variabilità della x? Quale il valore massimo assunto da $CE + DE$?



Posto $D\hat{A}B = x$ osserviamo che se $C \equiv B$ risulta $x = \frac{\pi}{6}$ e se $D \equiv A$ risulta $x = \frac{\pi}{2}$, quindi:

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo ora CE e DE in funzione di x.

$$CE = AC\ tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = (2\cos(x-\alpha)) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[cosx\ cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + senx\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}senx\right) = cosx + \frac{\sqrt{3}}{3}\ senx = CE$$

$$DE = BD\ tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = (2\mathrm{sen\ x}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ sen\ x = DE$$

Quindi risulta:

$$CE + DE = \left(cosx + \frac{\sqrt{3}}{3}\ senx\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\ sen\ x = cosx + \sqrt{3}\ sen\ x = f(x) = CE + DE$$

Per trovare il valore massimo di $CE + DE$ osserviamo che la f(x) può essere scritta nella seguente forma:

$$f(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\ sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Questa espressione è massima (e vale 2) quando $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ $,da\ cui\ \ x = \frac{\pi}{3}$. Quindi:

il valore massimo di $CE + DE$ è 2.

Notiamo che in tal caso gli angoli DAB e CBA misurano entrambi $\frac{\pi}{3}$, quindi il quadrilatero diventa un trapezio isoscele.

3)

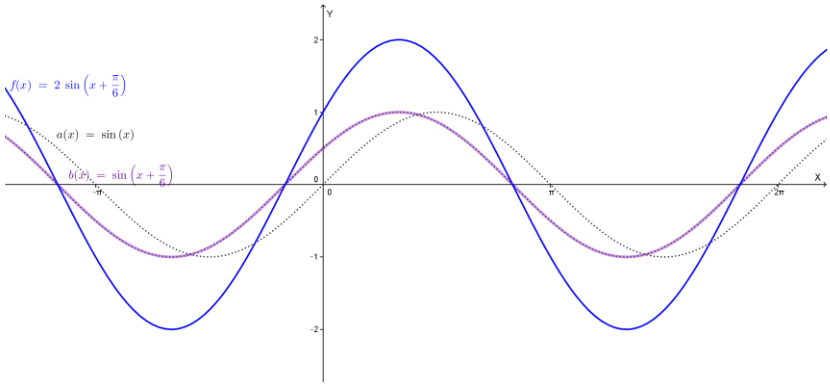
Posto $g(x) = k\ sen(x + \varphi)$ *si trovino* k *e* φ *di modo che sia* $g(x) = f(x)$.

Abbiamo visto nel punto precedente che $f(x)$ può essere scritta nella forma $2\ sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; quindi $g(x) = k\ sen(x + \varphi) = f(x)$ se $k = 2$ e $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

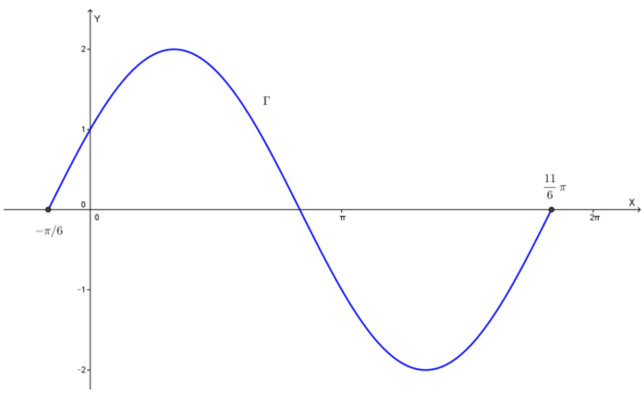
4)

Si tracci, a prescindere dai limiti geometrici del problema, il grafico Γ *di* $f(x)$ *e si denoti con* R *la regione delimitata, per* $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right]$*, dall'asse* x *e da* Γ*. Si calcoli l'area di* R *e si calcoli altresì il volume del solido generato da* R *nella rotazione attorno all'asse* x*.*

Il grafico Γ della funzione $f(x) = 2\ sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ si ottiene a partire dal grafico della funzione $y = sen\ x$ operando una traslazione verso sinistra di $\frac{\pi}{6}$ ed una dilatazione verticale di fattore 2. La funzione è inoltre periodica con periodo $T = 2\pi$.



Il grafico Γ di $f(x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right]$, di ampiezza pari ad un periodo, è il seguente:



Osserviamo che l'area della regione R è uguale all'area della regione delimitata dal grafico di $y = 2sen\,x$ e dall'asse x nell'intervallo $[0; 2\pi]$, ed è quindi data da:

$$Area(R) = 2\int_0^{\pi} 2sen\,x\,dx = 4[-\cos x]_0^{\pi} = 4(1+1) = 8\,u^2 = Area(R).$$

Anche il volume equivale a quello generato dalla rotazione attorno all'asse x della regione delimitata dal grafico di $y = 2sen\,x$ e dall'asse x nell'intervallo $[0; 2\pi]$, ed è quindi data da:

$$V = 2\left[\pi\int_0^{\pi}(2sen\,x)^2\,dx\right] = 4\pi\int_0^{\pi} 2sen^2x\,dx$$

Cerchiamo una primitiva di sen^2x:

$$\int 2sen^2x\,dx = \int(1-cos2x) = x - \frac{1}{2}sen2x + C$$

Quindi:

$$V = 4\pi\int_0^{\pi} 2sen^2x\,dx = 4\pi\left[x - \frac{1}{2}sen2x\right]_0^{\pi} = 4[\pi - 0 - (0)] = (4\pi^2)\,u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria