Scuole italiane all'estero (Americhe) 2011 – Quesiti

QUESITO 1

Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = senx$ e l'asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

$A)\ 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ senx\ dx\,;\quad B)\ \pi \int_0^1 (arcsenx)^2 dx\,;\quad C)\ \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2x\ dx\,;\quad D)\ nessuno\ di\ questi$

Si motivi la risposta.

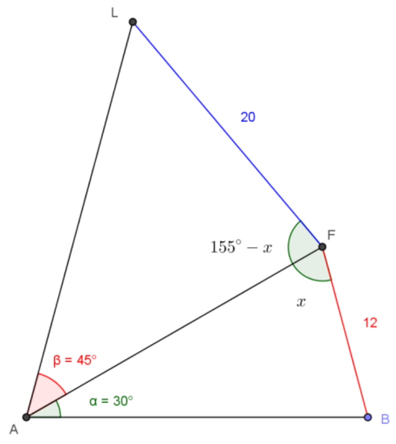
In base al metodo dei "gusci cilindrici" la risposta è la A).

Per un approfondimento sul **Metodo dei gusci cilindrici** si veda la seguente pagina di Matefilia:

http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf

QUESITO 2

Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B, una fontana in F e un lampione in L. Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede FL pari a 45°. Sapendo che BF=12m e FL=20m e che $B\hat{F}L = 155°$, si spieghi ad Angelo come procedere per calcolare AB, AF e AL. Sono attendibili i risultati AB=AF≅23,18 m e AL≅27,85 m?



Per il teorema dei seni nel triangolo ABF si ha:

$$\frac{AF}{sen(150°-x)} = \frac{12}{sen(30°)};\quad AF = 24\,sen(150° - x)$$

Per il teorema dei seni nel triangolo ALF si ha:

$$\frac{AF}{sen(x-20°)} = \frac{20}{sen(45°)};\quad AF = 20\sqrt{2}\,sen(x - 20°)$$

Quindi: $24\,sen(150° - x) = 20\sqrt{2}\,sen(x - 20°)$

$$6\,sen(150° - x) = 5\sqrt{2}\,sen(x - 20°)$$

$$6(sen150°cosx - senx\ cos150°) = 5\sqrt{2}(sen\ x \cos 20° - cosx\ sen\ 20°)$$

$$6\left(\frac{1}{2}\ cosx + \frac{\sqrt{3}}{2} senx\right) = \left(5\sqrt{2}\cos 20°\right)senx - \left(5\sqrt{2}\ sen\ 20°\right)cosx$$

$$senx\ \left(3\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\ cos\ 20°\right) = cosx\left(-5\sqrt{2}\ sen\ 20° - 3\right)$$

Dividendo per $cosx$ (che è diverso da zero altrimenti l'equazione non sarebbe verificata):

$$tgx = \frac{-4\sqrt{2}\ sen\ 20° - 3}{3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\ cos\ 20°} \cong 3.741 \quad da\ cui \quad x = arctg(0.0586) \cong 75.034°$$

Pertanto:

$AF = 24\ sen(150° - x) \cong 24\ sen(150° - 75.034°) \cong 23.1786 \cong 23.18\ m$ (per eccesso)

Essendo $x \cong 75.034°$ risulta:

$\frac{AB}{senx} = \frac{12}{sen30°}$, $AB = 24 \cdot sen(75.034°) \cong 23.1859 \cong 23.18\ m$ (per difetto)

Quindi è attendibile il risultato: *AB=AF≅23,18 m.*

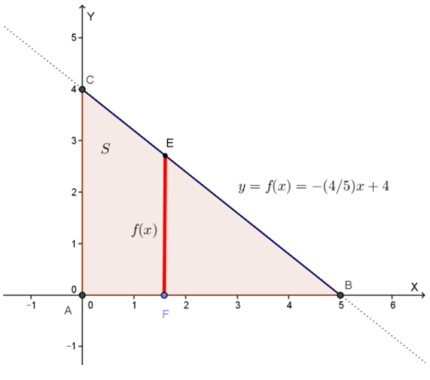
Calcoliamo ora AL:

$$\frac{AL}{sen(155° - x)} = \frac{20}{sen(45°)}\ , \quad AL = 20\sqrt{2}\ sen(155° - x) \cong 20\sqrt{2}\ \ sen(155° - 75.034°)$$

Da cui: $AL \cong 27.852\ \ \cong 27.85\ m : il\ risultato\ fornito\ è\ attendibile.$

QUESITO 3

La base di un solido S è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta d'equazione: $4x + 5y = 20$. *Si calcoli il volume di S sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi.*



Il volume richiesto si ottiene mediante il seguente integrale

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^5 A(x)dx$$

Dove A(x) è l'area del semicerchio di diametro

$$y = f(x) = -\frac{4}{5}x + 4$$

Pertanto:

$$A(x)=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{f(x)}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi\big(f(x)\big)^2=\frac{1}{8}\pi\left(-\frac{4}{5}x+4\right)^2=\frac{\pi}{8}\left(\frac{16x^2}{25}-\frac{32x}{5}+16\right)$$

Il volume richiesto è quindi:

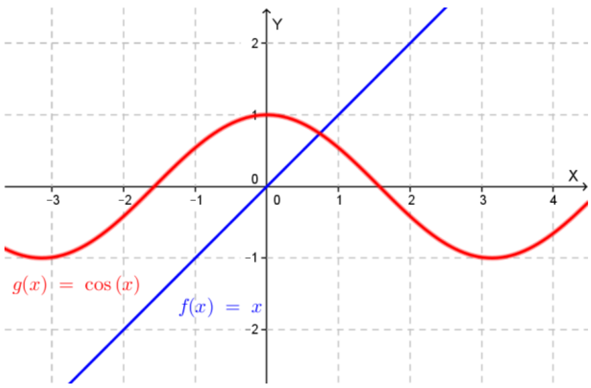
$$V=\int_0^5 A(x)dx=\int_0^5\frac{1}{200}\pi(16x^2-160x+400)dx=\frac{\pi}{200}\left[\frac{16}{3}x^3-80x^2+400x\right]_0^5=$$

$$=\frac{\pi}{200}\left(\frac{2000}{3}\right)=\left(\frac{10\pi}{3}\right)\ u^3\cong 10.472\ u^3=V\ .$$

QUESITO 4

Si spieghi perché l'equazione $\cos x=x$ *ha almeno una soluzione.*

Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione fra le curve di equazioni $f(x)=\cos x$ e $g(x)=x$. Graficamente si scopre facilmente che le due curve hanno un solo punto di intersezione, quindi l'equazione data ha una soluzione (compresa fra 0 e 1).



Alternativamente possiamo procedere utilizzando il teorema degli zeri.
Consideriamo la funzione $f(x)=cosx-x$ e notiamo che $f(0)=1>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0.$
La funzione è continua su tutto R, ed in particolare nell'intervallo chiuso e limitato $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, assume agli estremi valori di segno opposto e quindi, per il teorema degli zeri, la funzione si annulla almeno una volta nell'intervallo aperto $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

ciò equivale a dire che l'equazione data ammette almeno una soluzione.

QUESITO 5

Si risolva l'equazione $|x-1| = 1-|x|$.

Osserviamo che: $|x-1| = \begin{cases} x-1, & se\ x \geq 1 \\ -x+1, & se\ x < 1 \end{cases}$ e $|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$

Abbiamo quindi i seguenti casi:

$x < 0$: l'equazione diventa $-x+1 = 1+x,\ \ x = 0\ \ non\ accettabile$
$0 \leq x < 1$: l'equazione diventa $-x+1 = 1-x,\ \ sempre\ verificato$
$x \geq 1$: l'equazione diventa $x-1 = 1-x,\ \ x = 1\ \ soluzione\ accettabile$

L'equazione ammette quindi le (infinite) soluzioni: $0 \leq x \leq 1$.

QUESITO 6

Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

Se una sfera è inscritta in un cubo allora il suo diametro è uguale allo spigolo del cubo. Quindi se indichiamo con R il raggio della sfera, lo spigolo del cubo è 2R. Si ha:

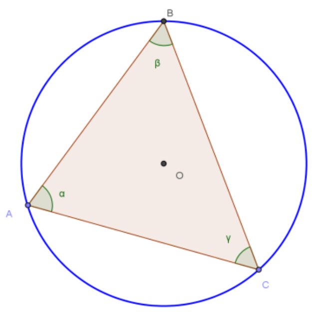
$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V(cubo) = (2R)^3 = 8R^3$. Quindi:

$$\frac{V(sfera)}{V(cubo)} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8R^3} = \frac{\pi}{6}$$

QUESITO 7

Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Basta applicare il teorema della corda:



$$AB = 2Rsen(\gamma): \quad \frac{AB}{sen(\gamma)} = 2R$$

$$AC = 2Rsen(\beta): \quad \frac{AC}{sen(\beta)} = 2R$$

$$BC = 2Rsen(\alpha): \quad \frac{BC}{sen(\alpha)} = 2R$$

QUESITO 8

Sia $t \in [0; 2\pi]$*; quale è la curva rappresentata dalle equazioni* $x = a\cos t \;\; e \;\; y = b \, sen\, t$*?*

Osserviamo che $\cos^2 t + sen^2 t = 1$ quindi:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si tratta di un'ellisse di centro O, assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani e misura dei semiassi a e b.

Con la collaborazione di Angela Santamaria