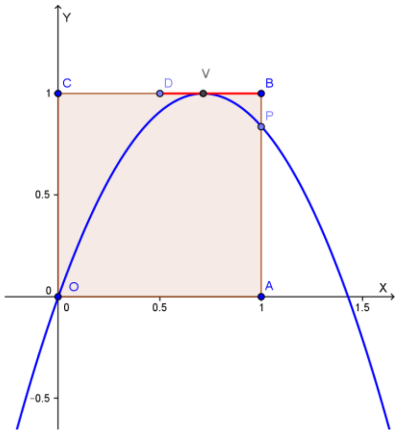
Scuole italiane all'estero (Europa) 2011 – PROBLEMA 1

Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy si consideri il quadrato OABC, dove A= (1; 0) e C=(0; 1).

1)

Sia P un punto appartenente al lato AB. Si considerino le parabole, con asse parallelo all'asse y, passanti per O e per P e tangenti al lato BC. Quali sono i possibili vertici di tali parabole, al variare di P su AB?



Le parabole richieste hanno equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$; dovendo passare per l'origine c=0, quindi: $y = ax^2 + bx$; il punto P ha coordinate $P = (1; k), con\ 0 \le k \le 1$. Imponiamo il passaggio per P: $k = a + b$. La retta BC ha equazione y=1, ed è la tangente nel vertice della parabola, quindi:

$$y_V = 1: \ -\frac{\Delta}{4a} = 1 \,, -b^2 + 4ac = 4a \,, \qquad b^2 = -4a; \ a = -\frac{b^2}{4} \quad ed\ essendo\ \ k = a + b:$$

$$k = -\frac{b^2}{4} + b$$

Poiché $0 \le k \le 1$ deve essere: $0 \le -\frac{b^2}{4} + b \le 1$ da cui:

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4} + b \ge 0 \\ -\frac{b^2}{4} + b \le 1 \end{cases} ; \ \begin{cases} b^2 - 4b \le 0 \\ b^2 - 4b + 4 \ge 0 \end{cases} ; \ \begin{cases} 0 \le b \le 4 \\ (b-2)^2 \ge 0 \end{cases} ; \ \begin{cases} 0 \le b \le 4 \\ \forall b \end{cases} : \ 0 \le b \le 4$$

L'ascissa del vertice è: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2\left(-\frac{b^2}{4}\right)} = \frac{2}{b}$. Poiché il vertice deve appartenere al lato BC (B escluso) deve essere:

$0 < \frac{2}{b} \leq 1 \;\; da\ cui \quad \begin{cases} \frac{2}{b} > 0 \\ \frac{2}{b} \leq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} b > 0 \\ \frac{2-b}{b} \leq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} b > 0 \\ b < 0 \;\; or \;\; b \geq 2 \end{cases} : \; b \geq 2$

Le parabole richieste hanno quindi equazione del tipo: $y = -\frac{b^2}{4}x^2 + bx \;\; con \;\; 2 \leq b \leq 4$.

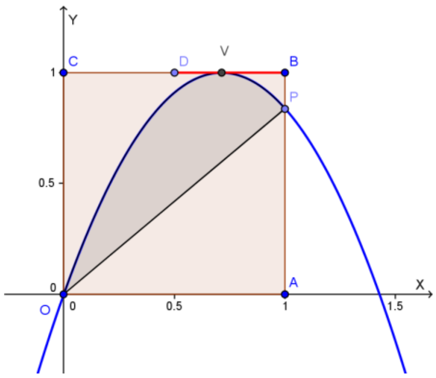
Al variare di P su AB i possibili vertici hanno coordinate:

$x_V = \frac{2}{b} \quad , \quad y_V = 1 \quad con \quad 2 < b \leq 4$

Quindi i vertici variano sul segmento DB (estremi inclusi), con D punto medio di BC.

2)

Tra quelle sopra indicate, si dimostri che la parabola Γ_1, tale che il segmento parabolico limitato dalla corda OP abbia area pari alla metà del quadrato OABC, ha equazione: $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$.



Scriviamo l'equazione della retta passante per l'origine degli assi cartesiani e per il punto OP, dove $P = (1; k), con\ 0 \leq k \leq 1$: retta OP: $y = kx$.

Ricordiamo che la parabola ha equazione: $y = -\frac{b^2}{4}x^2 + bx \;\; con \;\; 2 \leq b \leq 4$ e che risulta: $k = -\frac{b^2}{4} + b$.

L'area del segmento parabolico si può calcolare mediante il seguente integrale:

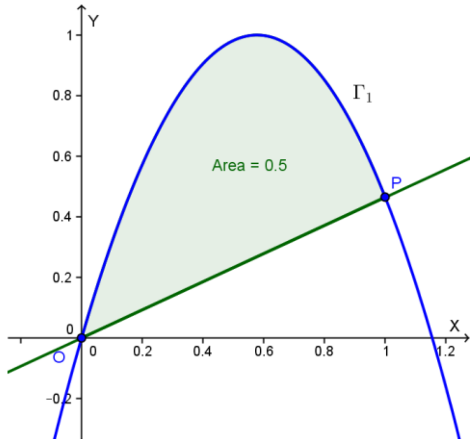
$$Area\ (segm.\ parabolico) = \int_0^1 \left[-\frac{b^2}{4}x^2 + bx - kx \right] dx = \left[-\frac{1}{12}b^2x^3 + \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\left(-\frac{b^2}{4} + b \right) = \frac{1}{2}, -\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$2b^2 - 3b^2 + 12 = 0, \;\; b^2 = 12, b = \pm 2\sqrt{3}$ di cui è accettabile solo il valore positivo.

La parabola richiesta ha quindi equazione: $y = -\frac{b^2}{4}x^2 + bx, \;\; y = -3x^2 + 2\sqrt{3}\,x$ c.v.d.

La situazione grafica è la seguente:



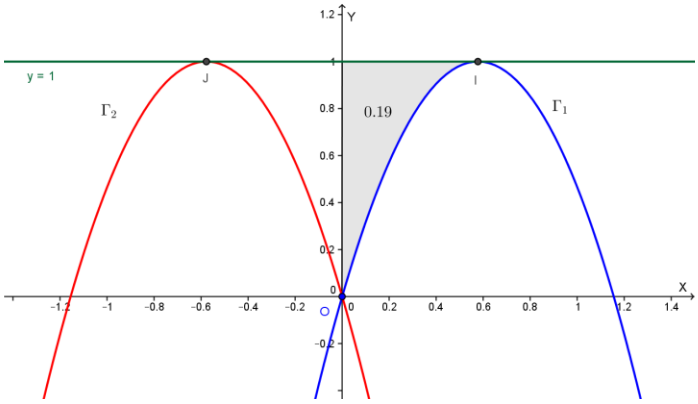
3)

Si determini l'equazione della parabola Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y e si calcoli l'area della regione piana delimitata dalle due parabole e dalla comune retta tangente nei loro vertici.

La parabola Γ_2 si ottiene da Γ_1 scambiando x in $-x$; la sua equazione è quindi:

$\Gamma_2: y = -3x^2 - 2\sqrt{3}x$

La regione richiesta è simmetrica rispetto all'asse delle y e la sua area è il doppio dell'area delimitata da Γ_1, dall'asse y e dalla retta $y = 1$:

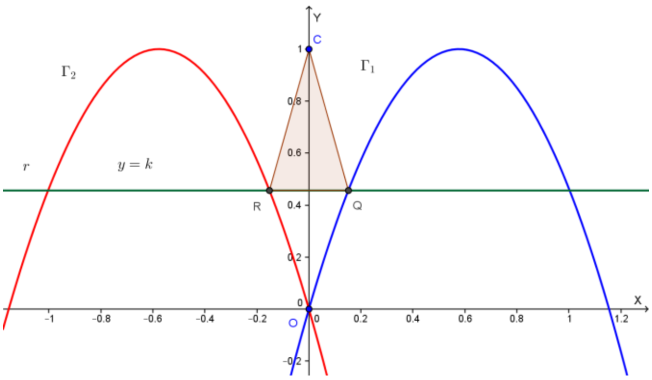


Il vertice I di Γ_1 ha coordinate : $I = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$, quindi l'area richiesta è data da:

$$Area = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[1 - \left(-3x^2 + 2\sqrt{3}x\right)\right] dx = 2\left[x + x^3 - \sqrt{3}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{9}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right] = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

4)

Sia r una retta di equazione $y = k$, con $k \in [0;1]$ e siano Q e R i punti (più vicini all'asse y) in cui r taglia, rispettivamente, le parabole Γ_1 e Γ_2. Si determini il valore di k per cui risulti massima l'area del triangolo QCR.



Cerchiamo le coordinate di Q:

$$Q: \begin{cases} y = k \\ y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x \end{cases} ; \quad 3x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0 \; ; \quad x_Q = \frac{-\sqrt{12-12k}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} > 0$$

Risulta quindi:

$$Area(QCR) = x_Q \cdot (1-k) = \left(-\frac{\sqrt{12-12k}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(1-k) = \frac{1}{3}(1-k)(-\sqrt{3-3k} + \sqrt{3})$$

Tale area è massima se lo è:

$$\begin{cases} y = (1-k)(-\sqrt{3-3k} + \sqrt{3}) \\ 0 \le k \le 1 \end{cases}$$

$$y' = \left(\sqrt{3-3k} - \sqrt{3}\right) + (1-k) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3-3k}} \ge 0 \;\; se$$

$$\left(\sqrt{3-3k} - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3-3k}\right) + 3 - 3k \ge 0; \; \left(6 - 6k - 6\sqrt{1-k}\right) + 3 - 3k \ge 0$$

$$9 - 9k - 6\sqrt{1-k} \ge 0 \; ; \quad 2\sqrt{1-k} \le 3 - 3k; \quad da\ cui, essendo\ 0 \le k \le 1:$$

$$4(1-k) \le 9 - 18k + 9k^2 \; ; \quad 9k^2 - 14k + 5 \ge 0 \; ; \quad 0 \le k \le \frac{5}{9} \; or \; k \ge 1$$

Quindi la funzione è crescente per $0 \le k < \frac{5}{9}$ e decrescente per $k > \frac{5}{9}$, quindi:

l'area dl triangolo QCR è massima se $k = \frac{5}{9}$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria