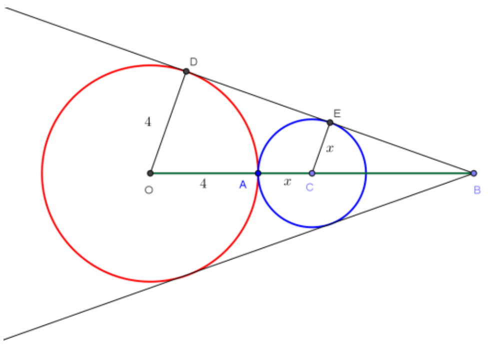
Scuole italiane all'estero (Europa) 2011 – PROBLEMA 2

Una circonferenza di centro O e raggio 4 è tangente esternamente nel punto A ad un'altra circonferenza di raggio x minore di 4. Le tangenti comuni, non passanti per A, si incontrano in un punto B.



1)

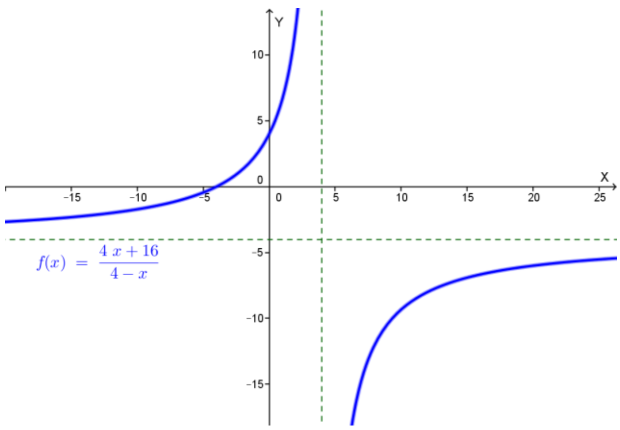
Si provi che, al variare di x, la distanza $f(x)$ di B da O è data da $f(x)=\frac{4x+16}{4-x}$; si disegni il grafico Γ di $f(x)$ prescindendo dai limiti posti ad x dal problema.

Dalla similitudine fra i triangoli OBD e CBD (rettangoli in D ed E) otteniamo:

$OB:CB=OD:CE$, $\quad f(x):(f(x)-4-x)=4:x$, $\quad x\cdot f(x)=4\cdot f(x)-16-4x \quad da\ cui$:

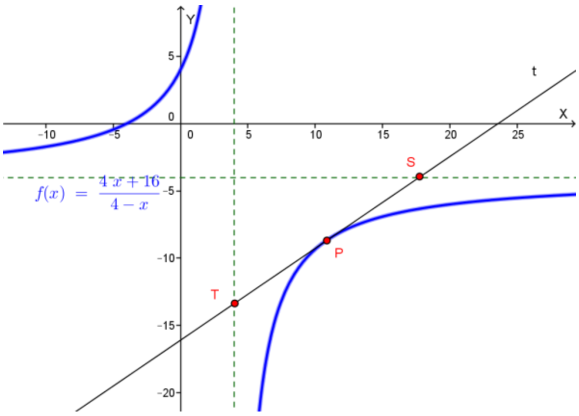
$$f(x)=\frac{4x+16}{4-x}$$

Si tratta di una funzione omografica di centro $(4;\ -4)$ che passa per il punto $(0;\ 4)$:



2)

Sia P un punto di Γ. Si dimostri che la retta tangente a Γ in P incontra gli asintoti di Γ in due punti equidistanti da P. Si verifichi altresì che Γ ammette un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate.



Il generico punto P di Γ ha coordinate del tipo $P = \left(a;\ \frac{4a+16}{4-a}\right)$, con $a \neq 4$. Il coefficiente angolare della tangente in P è $f'(a)$. Ma risulta:

$f'(x) = \frac{32}{(4-x)^2}$. Quindi la tangente in P ha equazione:

$$y - \frac{4a+16}{4-a} = \frac{32}{(4-a)^2}(x-a)$$

Cerchiamo le intersezioni con gli asintoti:

$$S: \begin{cases} y = -4 \\ y - \frac{4a+16}{4-a} = \frac{32}{(4-a)^2}(x-a) \end{cases} ;\ -4 - \frac{4a+16}{4-a} = \frac{32}{(4-a)^2}(x-a)\ ;$$

$$\frac{-32}{4-a} = \frac{32}{(4-a)^2}(x-a)\,;\ -4+a = x-a;\ \ x = 2a-4:\quad S = (2a-4;\ -4)$$

$$T: \begin{cases} x = 4 \\ y - \frac{4a+16}{4-a} = \frac{32}{(4-a)^2}(x-a) \end{cases} ;\ y - \frac{4a+16}{4-a} = \frac{32}{(4-a)^2}(4-a)\ ; y = \frac{32}{4-a} + \frac{4a+16}{4-a}$$

$$y = \frac{48+4a}{4-a}:\quad T = \left(4;\ \frac{48+4a}{4-a}\right)$$

Dobbiamo dimostrare che P coincide con il punto medio M è il punto medio di ST.

$$x_M=\frac{2a-4+4}{2}=a=x_P; \quad y_M=\frac{-4+\frac{48+4a}{4-a}}{2}=\frac{32+8a}{2(4-a)}=\frac{4a+16}{4-a}=y_P$$

Dobbiamo ora verificare che Γ ha un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate. Abbiamo già osservato che la curva in questione è una funzione omografica di centro $(4;\ -4)$. Verifichiamo che effettivamente la curva è simmetrica rispetto a tale punto:
Le equazioni della simmetria rispetto al punto (a; b) sono:

$$\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}; \quad \begin{cases} x'=8-x \\ y'=-8-y \end{cases}; \quad \begin{cases} x=8-x' \\ y=-8-y' \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $y=\frac{4x+16}{4-x}$ trascurando per semplicità gli apici:

$$-8-y=\frac{4(8-x)+16}{4-(8-x)}; \quad -8-y=\frac{48-4x}{-4+x}; \quad y=-8-\frac{48-4x}{-4+x}=\frac{-16-4x}{-4+x}=\frac{4x+16}{4-x}$$

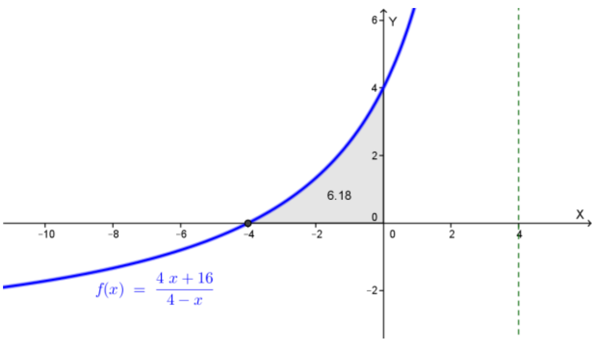
L'equazione della simmetrica di Γ rispetto al punto $(4;\ -4)$ coincide con quella di Γ: Γ è quindi simmetrica rispetto a tale punto.

Se volessimo trovare direttamente il centro di simmetria della curva dovremmo procedere con le equazioni generiche della simmetria rispetto al punto (a; b) ed imporre all'equazione della curva trasformata di coincidere con quella della curva di partenza.

3)

Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra Γ e gli assi coordinati.

La regione richiesta è quella indicata nella figura seguente:



L'area della regione di piano indicata si ottiene mediante il seguente integrale:

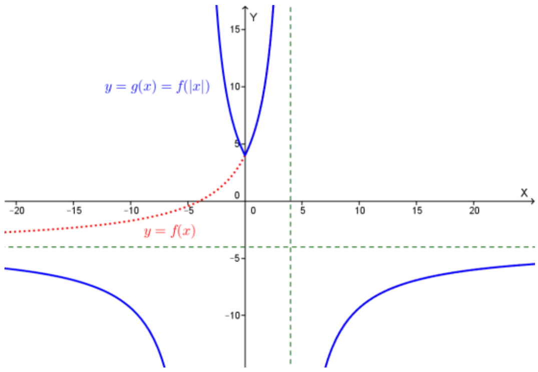
$$\int_{-4}^{0}\frac{4x+16}{4-x}\,dx=4\int_{-4}^{0}\frac{x+4}{4-x}dx=-4\int_{-4}^{0}\frac{-x-4}{4-x}dx=-4\int_{-4}^{0}\frac{-x+4-8}{4-x}dx=$$
$$=-4\int_{-4}^{0}\left(1-\frac{8}{4-x}\right)dx=-4[x]_{-4}^{0}-32\int_{-4}^{0}\left(\frac{-1}{4-x}\right)dx=-4(0+4)-32[\ln|4-x|]_{-4}^{0}=$$

$= -16 - 32(ln4 - ln8) = (-16 + 32ln2)\ u^2 \cong 6.18\ u^2 = Area$

4)

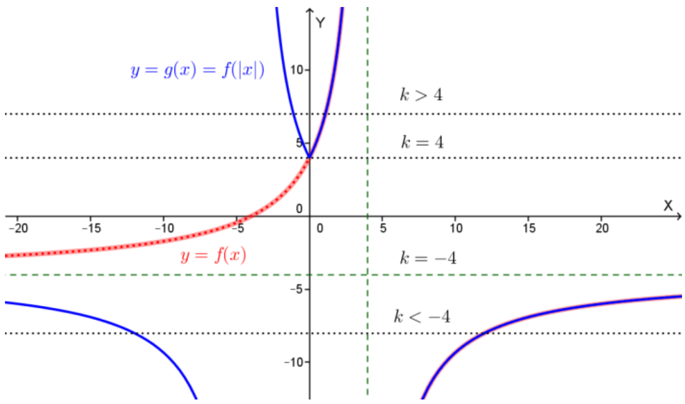
Sia infine $g(x) = f(|x|)$. Quale il grafico di $g(x)$? Si determini, al variare di k il numero delle radici dell'equazione $g(x) = k$.

Il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ confermando la parte a destra dell'asse y e ribaltandola rispetto allo stesso asse:



Le radici dell'equazione $g(x) = k$ equivalgono alle ascisse delle intersezioni fra il grafico di $y = g(x)$ e la retta $y = k$. Osservando il grafico si può facilmente concludere che l'equazione ha:

2 soluzioni distinte se $k > 4\ \ o\ \ k < -4$
2 soluzioni coincidenti se $k = 4$
Nessuna soluzione se $-4 \le k < 4$



Con la collaborazione di Angela Santamaria