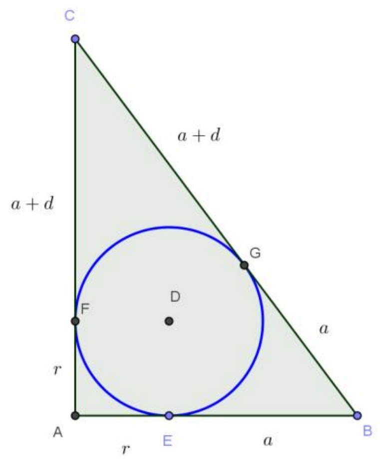
Scuole italiane all'estero (Europa) 2011 – Quesiti

QUESITO 1

Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d.



Detto r il raggio della circonferenza inscritta ed r+a il lato minore, il secondo lato deve essere (r+a)+d. Per una nota proprietà della circonferenza si ha FC=CG=a+d e BG=BE=a. Ma deve essere BC=AC+d, quindi:

$$2a + d = (a + d + r) + d, a = d + r$$

Ma, per il teorema di Pitagora risulta:

$$(a + r)^2 + (r + a + d)^2 = (2a + d)^2$$

Sostituendo ad a il valore d+r otteniamo:

$$(2r + d)^2 + (2r + 2d)^2 = (2r + 3d)^2$$

E sviluppando si arriva a $r^2 = d^2$ da cui (essendo r e d positivi) la soluzione richiesta $r = d$.

QUESITO 2

Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = senx$ e l'asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

$A)\ 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ senx\ dx\,;\quad B)\ \pi \int_0^1 (arcsenx)^2 dx\,;\quad C)\ \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x\ dx\,;\quad D)\ nessuno\ di\ questi$

Si motivi la risposta.

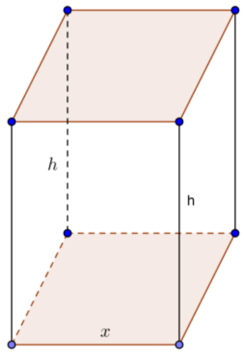
In base al metodo dei "gusci cilindrici" la risposta è la A).

Per un approfondimento sul **Metodo dei gusci cilindrici** si veda la seguente pagina di Matefilia:

http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf

QUESITO 3

Fra tutti i parallelepipedi, a base quadrata, di superficie totale a^2 quale è quello di volume massimo?



Indichiamo con x (con x>0) il lato del quadrato di base e con h l'altezza. Si ha:

$$2x^2 + 4hx = a^2, da\ cui\ \ h = \frac{a^2 - 2x^2}{4x}$$

Il volume V è dato da:

$$V = x^2 h = x^2 \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{4x} = \frac{1}{4}x(a^2 - 2x^2)$$

Il volume è massimo se lo è :

$$y = \ x(a^2 - 2x^2)$$

Risulta: $y' = a^2 - 2x^2 + x(-4x) = -6x^2 + a^2 \geq 0\ \ se\ \ -\frac{a}{\sqrt{6}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{6}}$.
Quindi la funzione è crescente per $0 < x < \frac{a}{\sqrt{6}}$ e decrescente per $x > \frac{a}{\sqrt{6}}$; pertanto è massima se $x = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Per tale valore di x si ha:

$$h = \frac{a^2 - 2x^2}{4x} = \frac{a^2 - \frac{1}{3}a^2}{\frac{4a}{\sqrt{6}}} = \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4a} = \frac{a\sqrt{6}}{6} = a$$

Fra i parallelepipedi dati quello di volume massimo ha è il cubo di spigolo $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

QUESITO 4

La curva di equazione $y = \sqrt{x \ln x}$ ammette punti con tangente parallela all'asse x? Ammette punti con tangente parallela all'asse y? In caso affermativo si determinino.

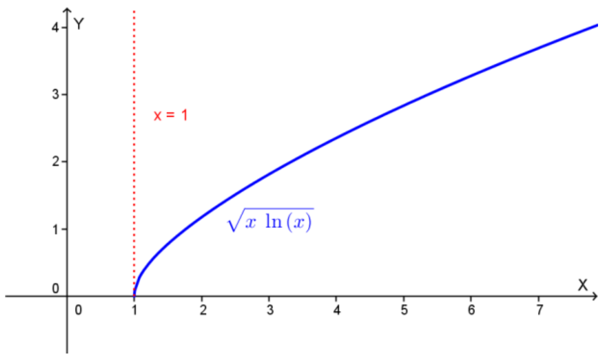
Osserviamo che il dominio della funzione è dato $x\ lnx \geq 0\ e\ x > 0\ \ da\ cui\!: lnx \geq 0, x \geq 1$
Dominio: $x \geq 1$.
Osserviamo anche che la funzione è positiva per x>1 e si annulla per x=1.
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{\ln x + 1}{2\sqrt{x \ln x}} = 0\ \ se\ \ \ln x = -1,\ \ x = \frac{1}{e} < 1$$

Quindi NON CI SONO PUNTI CON TANGENTE PARALLELA ALL'ASSE X.

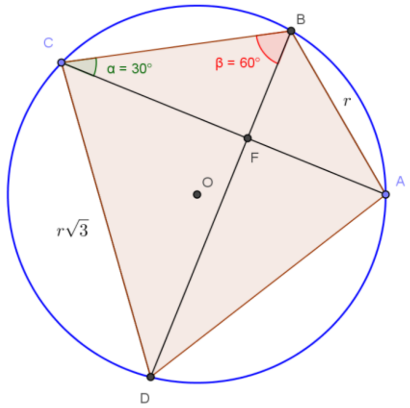
La funzione non è derivabile per x=1, e per x che tende a 1 più la derivata tende a più infinito: per x=1 abbiamo quindi tangente parallela all'asse y.

Il grafico della funzione è del tipo:



QUESITO 5

In una circonferenza di centro O e raggio r sono date due corde prive di punti comuni $AB = r$ e $CD = r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari.



La corda AB è il lato dell'esagono regolare inscritto, quindi l'angolo ACB è di 30°.
La corda CD è il lato del triangolo equilatero inscritto, quindi l'angolo CBD è di 60°.
Il triangolo BCF è quindi rettangolo in F e pertanto le diagonali del quadrilatero ABCD sono perpendicolari.

QUESITO 6

Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t+\frac{1}{t}; t-\frac{1}{t}\right)$. Quale è l'equazione cartesiana del luogo descritto da P al variare di $t\ (t \neq 0)$?

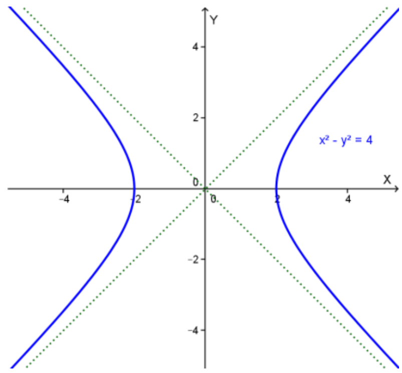
Il luogo ha le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro per eliminare il parametro t: $x + y = 2t,\ t = \frac{1}{2}(x + y)$
Sostituendo, per esempio, nella prima equazione, otteniamo:

$x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{2}{x+y},\quad 2x(x + y) = (x + y)^2 + 4$ da cui:

$$x^2 - y^2 = 4: \mathit{equazione\ cartesiana\ del\ luogo\ (iperbole\ equilatera)}$$



QUESITO 7

Si calcoli il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *nell'intervallo* $[-1;\ 1]$ *e se ne indichi il significato geometrico.*

Il valor medio è dato da:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx}{2} = \frac{1}{2}[arctg\ x]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

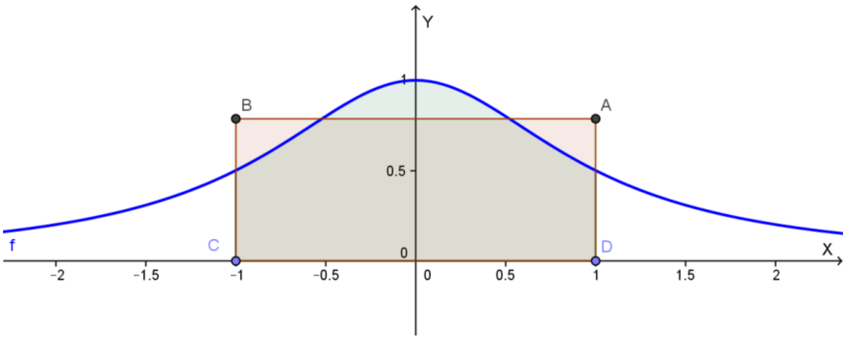
Dalla precedente uguaglianza ricaviamo che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

E questo vuol dire, nel nostro caso che l'area del trapezoide individuato dalla funzione nell'intervallo dato è uguale a quella del rettangolo di base b-a e altezza f(c):

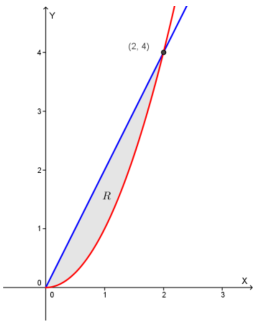
$$Area(trapezoide) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = Area\ (ABCD)$$

Questa la situazione grafica (f(c) è l'altezza del rettangolo):



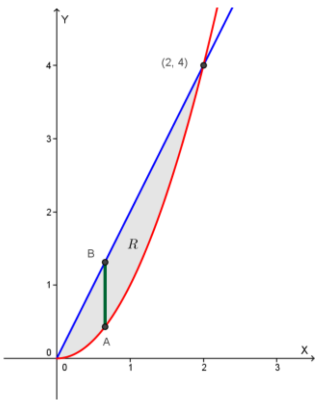
QUESITO 8

La regione R è delimitata da $y = 2x$ e $y = x^2$ come mostrato nella figura a lato. R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno area $A(x) = sen\frac{\pi}{2}x$. Si determini il volume di W.



Il volume di W si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V(W) = \int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 sen\frac{\pi}{2}x\ dx = \frac{2}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^2 = \frac{2}{\pi}(1+1) = \frac{4}{\pi}\ u^3$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria