Liceo della comunicazione 2011 – PROBLEMA 1

*Nel sistema di riferimento Oxy, sia Γ il grafico della funzione definita su **R** da*

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

1)

Si verifichi che Γ taglia l'asse delle ordinate nel punto A e l'asse delle ascisse nei punti B e C. Si calcolino le coordinate di A, B e C.

Le intersezioni con l'asse delle ordinate si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = (1 - x^2)e^{-x} \end{cases} \; ; \; y = 1 \, , \quad 1 - x^2 = 0 \, , \qquad A = (0;1)$$

Le intersezioni con l'asse delle ascisse si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (1 - x^2)e^{-x} \end{cases} \; ; \; (1 - x^2)e^{-x} = 0 \, , \quad 1 - x^2 = 0 \, , \qquad x = \pm 1 : \; B = (-1;0), C = (1;0)$$

2)

Si studi la funzione f e si disegni Γ.

$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

La funzione è definita e continua su tutto R, non pari né dispari e interseca gli assi nei punti A, B e C trovati nel punto precedente; è positiva se $1 - x^2 \geq 0 \, , -1 \leq x \leq 1$.

Limiti:

$\lim_{x \to -\infty} (1 - x^2)e^{-x} = -\infty$ (non esiste asintoto obliquo, poiché la funzione non è un infinito del primo ordine).

$\lim_{x \to +\infty} (1 - x^2)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} (-x^2)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{e^x} = 0^-$ (l'infinito del denominatore domina rispetto all'infinito del numeratore): y=0 è asintoto orizzontale.

Derivata prima:

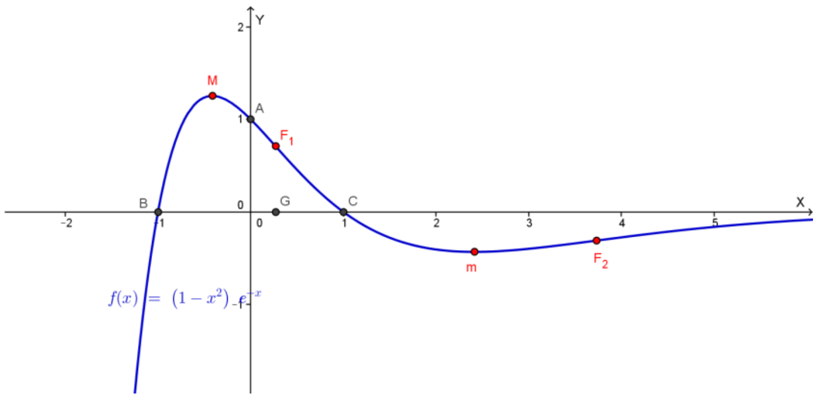
$f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x} \geq 0 \;\; se \;\; x^2 - 2x - 1 \geq 0$, $x \leq 1 - \sqrt{2} \;\; or \;\; x \geq \sqrt{2} + 1$

Quindi la funzione è crescente per $x < 1 - \sqrt{2} \;\; or \;\; x > \sqrt{2} + 1$ e decrescente per $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$; $x = 1 - \sqrt{2}$ è punto di massimo relativo (ed assoluto) con valore $f(1 - \sqrt{2}) = e^{\sqrt{2}-1}(2\sqrt{2} - 2) \cong 1.25$; $x = 1 + \sqrt{2}$ è punto di minimo relativo (ma non assoluto) con valore $f(1 + \sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}-1}(-2\sqrt{2} - 2) \cong -0.43$.

Derivata seconda:

$f''(x) = (-x^2 + 4x - 1)e^{-x} \geq 0 \;\; se \;\; -x^2 + 4x - 1 \geq 0$,
$2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$; il grafico quindi volge la concavità verso l'alto se $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ e verso il basso nella parte rimanente del dominio. Pertanto abbiamo due flessi, uno per $x = 2 - \sqrt{3}$ con ordinata $f(2 - \sqrt{3}) = e^{\sqrt{3}-2}(4\sqrt{3} - 6) \cong 0.71$ ed uno per $x = 2 + \sqrt{3}$ con ordinata $f(2 + \sqrt{3}) = e^{-\sqrt{3}-2}(-4\sqrt{3} - 6) \cong -0.31$.

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

Si consideri la funzione g definita su ***R*** *da* $g(x) = (1 + 2x + x^2)e^{-x}$*. Si mostri che la funzione g è una primitiva della funzione f su* ***R****.*

Per verificare che g è una primitiva di f è sufficiente verificare che $g'(x) = f(x)$.

$g'(x) = (2 + 2x)e^{-x} + (1 + 2x + x^2)(-e^{-x}) = e^{-x}(2 + 2x - 1 - 2x - x^2) =$

$= (1 - x^2)e^{-x} = f(x)$

Nota: si potrebbe calcolare l'integrale indefinito di f(x), per parti, e constatare che g(x) è una primitiva di f(x).

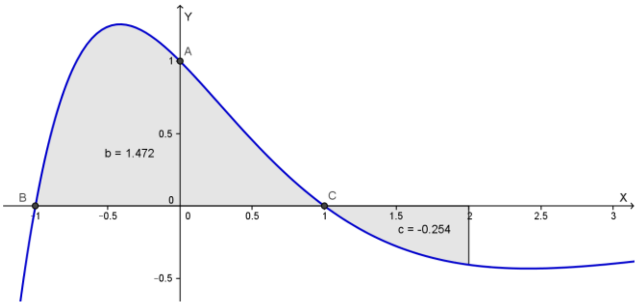
4)

Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra Γ e l'asse x sull'intervallo [-1; 2]. Si calcoli altresì

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_1^{\alpha}(1-x^2)e^{-x}\ dx$$

e si interpreti geometricamente il risultato.

La regione di cui si chiede l'area è indicata nella seguente figura:



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area=\int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-x}\,dx-\int_{1}^{2}(1-x^2)e^{-x}\,dx=[(1+2x+x^2)e^{-x}]_{-1}^{1}+$$

$$=[(1+2x+x^2)e^{-x}]_1^2=[4e^{-1}-0]-[9e^{-2}-4e^{-1}]=(8e^{-1}-9e^{-2})\ u^2\cong 1.73\ u^2$$

Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$\int_1^{\alpha}(1-x^2)e^{-x}\ dx=[(1+2x+x^2)e^{-x}]_1^{\alpha}=(1+2\alpha+\alpha^2)e^{-\alpha}-4e^{-1}$$

Il valore assoluto di questa espressione rappresenta l'area della regione compresa tra il grafico della funzione f(x) e l'asse x sull'intervallo $[1;\alpha]$. Il valore assoluto del limite per $\alpha\to+\infty$ rappresenta l'area della regione compresa tra il grafico della funzione f(x) e l'asse x sull'intervallo $[1;+\infty]$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_1^{\alpha}(1-x^2)e^{-x}\ dx=\lim_{\alpha\to+\infty}[(1+2\alpha+\alpha^2)e^{-\alpha}-4e^{-1}]=\lim_{\alpha\to+\infty}[\alpha^2e^{-\alpha}-4e^{-1}]=$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{\alpha^2}{e^{\alpha}}-4e^{-1}\right]=-4e^{-1}=-\frac{4}{e}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria