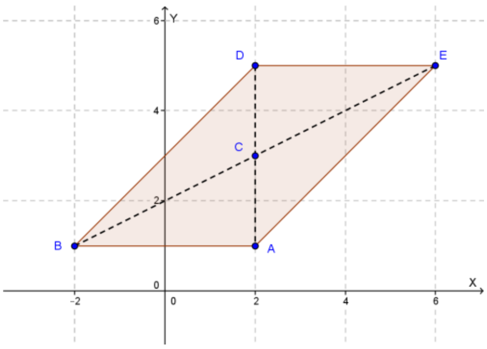
Liceo della comunicazione 2011 – PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani Oxy, sono dati i punti: A(2; 1), B(-2; 1), C(2; 3), D(2; 5), E(6; 5).



a)

Si verifichi che il quadrilatero convesso ABDE è un parallelogramma del quale C è il punto d'incontro delle diagonali. Si calcoli l'area del quadrilatero.

I lati opposti AB e DE, entrambi paralleli all'asse x, sono tra loro paralleli; inoltre hanno la stessa lunghezza (pari per entrambi a 4): quindi ABDE è un parallelogramma.

Cerchiamo l'intersezione tra le diagonali. La retta AD ha equazione x=2; la retta BE ha coefficiente angolare: $m = \frac{y_E - y_B}{x_E - xB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ quindi la sua equazione (come retta per B) è: $y - 1 = \frac{1}{2}(x+2)$, $y = \frac{1}{2}x + 2$

L'intersezione fra le diagonali è quindi:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} , \quad C = (2;3), \quad c.v.d.$$

Calcoliamo l'area del quadrilatero:

$Area(ABDE) = AB \cdot AD = 4 \cdot 4\, u^2 = 16\, u^2$

b)

Si consideri il fascio di curve di equazione

$$y = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$$

dove a è un parametro reale. Si verifichi che, qualunque sia a, la curva corrispondente ammette il punto C come centro di simmetria e le rette AD e BE come asintoti.

Le equazioni della simmetria rispetto al punto $C = (2; 3)$ sono:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 6 - y \end{cases} ; \quad da\ cui: \quad \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = 6 - y' \end{cases} ;$$

Troviamo la simmetrica della curva data (evitiamo per semplicità gli apici):

$$6 - y = \frac{(4-x)^2 + 2(4-x) + a}{2(4-x) - 4} = \frac{x^2 - 10x + 24 - a}{4 - 2x} \text{ , } y = \ 6 - \frac{x^2 - 10x + 24 + a}{4 - 2x},$$

$$y = \frac{-x^2 - 2x - a}{4 - 2x} = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$$

Quindi C è centro di simmetria per ogni a.

La funzione di equazione $y = \frac{x^2+2x+a}{2x-4}$ ha l'asintoto verticale x=2 (infatti il limite per x che tende a 2 è infinito): è la retta AD. La funzione è razionale fratta con il grado del numeratore che supera di 1 il grado del denominatore, quindi ammette asintoto obliquo, il cui coefficiente angolare è:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + a}{2x^2 - 4x} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 + 2x + a - x^2 + 2x}{2x - 4}\right] = \frac{4}{2} = 2$$

Quindi, per ogni valore di a, abbiamo l'asintoto obliquo di equazione:

$y = \frac{1}{2}x + 2$, che coincide con la retta BE.

c)

Si determini la curva λ del fascio passante per il punto P(0; 1) e si verifichi che le rette AB e DE sono tangenti a λ. Si tracci il grafico di λ .

La curva λ si ottiene da $y=\frac{x^2+2x+a}{2x-4}$ imponendo il passaggio per P(0; 1):

$1=\frac{a}{-4}$, $a=-4$; quindi la curva λ ha equazione:

$$\boldsymbol{y=f(x)=\frac{x^2+2x-4}{2x-4}}$$

Verifichiamo che AB, di equazione y=1, è tangente a λ:

$\begin{cases} y=1 \\ y=\frac{x^2+2x-4}{2x-4} \end{cases}$, $\frac{x^2+2x-4}{2x-4}=1,\ \ x^2+2x-4=2x-4\ ,\ \ x=0\ \ (doppio)$

Quindi λ è tangente ad AB in $(0;1)$.

Verifichiamo che DE, di equazione y=5, è tangente a λ:

$\begin{cases} y=5 \\ y=\dfrac{x^2+2x-4}{2x-4} \end{cases}$, $\dfrac{x^2+2x-4}{2x-4}=5,\ \ x^2+2x-4=10x-20\ ,\ \ x^2-8x+16=0\ ,$

$(x-4)^2=0, \qquad x=4\ (doppio)$

Quindi λ è tangente a DE in $(4;1)$.

Studiamo ora la funzione di equazione:

$$y=f(x)=\frac{x^2+2x-4}{2x-4}$$

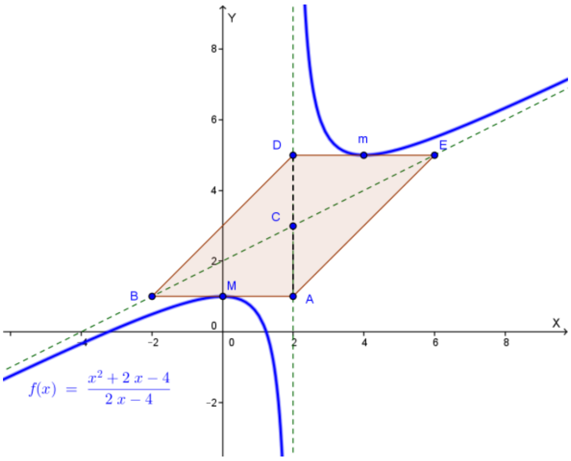
La funzione è definita e continua per ogni x diverso da 2. La sua equazione può essere riscritta nella seguente forma:

$y(2x-4)=x^2+2x-4\ ,\ \ x^2-2xy+2x+4y-4=0$ che è una conica; senza effettuare il riconoscimento di tale conica, avendo già verificato che proviene da una funzione che ha due asintoti possiamo affermare che si tratta di un'iperbole. Per completare lo studio è sufficiente quindi studiare la derivata prima per determinare il massimo ed il minimo.

$$f'(x)=\frac{4x^2-16x}{8x^2-32x+32}=\frac{x^2-4x}{2x^2-8x+8}=\frac{x^2-4x}{2(x-2)^2}\geq 0\ \ se\ \ x\leq 0\ \ or\ \ x\geq 4$$

La funzione è quindi crescente per x<0 e per x>4 e decrescente per 0<x<2 e 2<x<4: x=0 è quindi il punto di massimo e x=4 il punto di minimo, con ordinate rispettivamente 1 e 0.

Il grafico di λ è quindi il seguente:



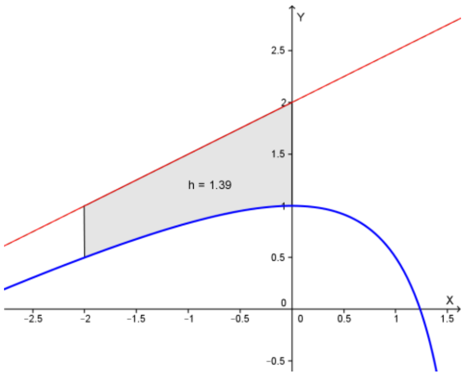
Per completare il grafico mancano solo le intersezioni con l'asse x:

$$\frac{x^2+2x-4}{2x-4}=0\,, \qquad x^2+2x-4=0\,, \qquad x=-1\pm\sqrt{5}$$

d)

Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da λ, dalla retta BE, dalla retta di equazione $x=-2$ e dall'asse y.

La regione di cui si chiede l'area è indicata nella seguente figura:



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+2-\frac{x^2+2x-4}{2x-4}\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{x^2-2x+4x-8-x^2-2x+4}{2(x-2)}\right)dx=$$

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{-4}{2(x-2)}\right)dx=-2\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{(x-2)}\right)dx=-2[\ln|x-2|]_{-2}^{0}=$$

$$=-2(ln2-ln4)=(2ln2)\,u^2\cong 1.39\,u^2=Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria