Liceo della comunicazione 2011 – QUESITI

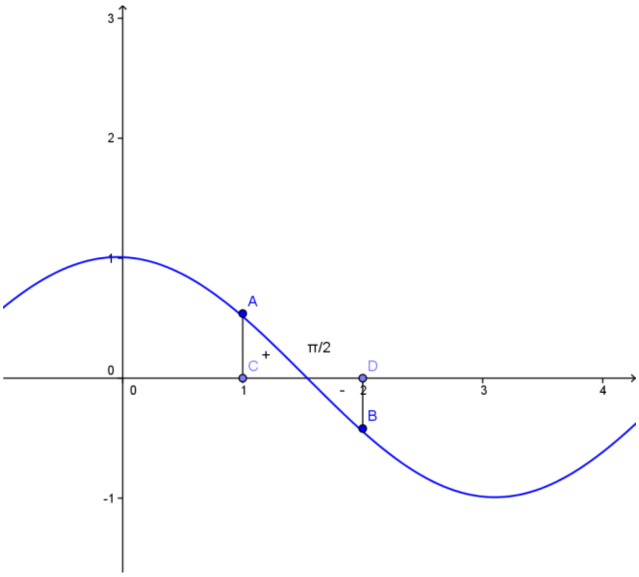
QUESITO 1

Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = cos(x)$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ radianti.

L'area richiesta è data da:

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \cos x\, dx = [senx]_1^{\frac{\pi}{2}} - [senx]_{\frac{\pi}{2}}^{2} = \ldots = 2 - sen1 - sen2 \cong 0.25$$

(si osservi la figura seguente …)



QUESITO 2

Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).

Il quadrato della distanza d(x) del generico punto della curva dal punto (4;0) è dato da:

$$d^2 = (x-4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = x^2 - 7x + 16$$

La distanza è minima quando lo è il suo quadrato, cioè per **x = 7/2** (… il minimo è nel vertice della parabola). Il punto richiesto ha quindi coordinate $\left(\frac{7}{2};\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

QUESITO 3

Si calcoli

$$\lim_{x\to a}\frac{tgx - tga}{x - a}$$

Il limite in questione è quello che conduce alla derivata di tgx in $x = a$, quindi vale $1+tg^2a=\frac{1}{\cos^2 a}$

Il calcolo diretto può essere effettuato utilizzando la regola di de L'Hôpital (dopo aver verificato che sono valide le condizioni: il limite si presenta nella forma $\left[\frac{0}{0}\right]$, numeratore e denominatore sono funzioni continue e derivabili in un intorno di $x = a$ e in tale intorno la derivata del denominatore non si annulla):

$$\lim_{x\to a}\frac{1+tg^2x}{1}=1+tg^2a$$

(**N.B.** a deve essere diverso da $\frac{\pi}{2}+k\pi$, altrimenti limite non ha senso).

QUESITO 4

Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

Basta risolvere l'equazione $\binom{n}{4}=\binom{n}{3}$, con n numero naturale maggiore o uguale a 4.

Siccome

$\binom{n}{4}=\binom{n}{n-4}$ è sufficiente che sia n-4 = 3, da cui n = 7.

QUESITO 5

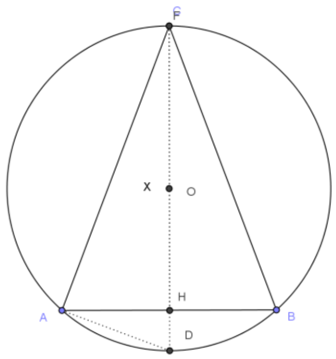
In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei suoi personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Quale la risposta (motivata) all'interrogativo posto?

Si tratta di un classico esempio di insiemi infiniti “equipotenti”, come dire “ugualmente numerosi”.
Infatti l’insieme dei numeri naturali può essere posto in corrispondenza biunivoca con l’insieme dei numeri naturali che sono quadrati perfetti (si pensi alla legge $n \leftrightarrow n^2$).
Quando abbiamo a che fare con insiemi infiniti alcune proprietà valide per gli insiemi finiti sembrano paradossali. Ricordiamo che si definisce *infinito* un insieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio (come nel caso in esame).

E’ chiaro che in tal caso il concetto di “ugualmente numerosi” è più delicato: sembra evidente che i numeri naturali siano “di più” dei quadrati perfetti (0,1,2,3,4,5,….sono “di più” di 0,1, 4, 9, 16, …), in realtà, potendosi stabilire tra i due insiemi una corrispondenza biunivoca, dobbiamo dire che sono “ugualmente numerosi”.

QUESITO 6

Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?



Il raggio R della sfera è 10 cm.
La superficie laterale del cono è $S = \pi \cdot \overline{AH} \cdot \overline{AC}$
Poniamo CH = x e teniamo presente le limitazioni $0 \le x \le 2R$.
Risulta: $\overline{AH} = \sqrt{x(2R - x)}$ (per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ADC).
L’apotema del cono AC vale: $\overline{AC} = \sqrt{x(2R)}$ (primo teorema di Euclide).
Quindi la superficie laterale è: $S = \pi \cdot \sqrt{2Rx^2(2R - x)}$, che è massima se lo è $y = x^2(2R - x)$. Studiando la derivata prima si scopre facilmente che il massimo richiesto si ha quando:

$$x = \frac{4}{3}R = \frac{40}{3}\ cm.$$

QUESITO 7

Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

Si tratta di una distribuzione binomiale con p=1/4 (probabilità di 1 successo, cioè di rispondere correttamente ad una domanda) e q=3/4.
La probabilità di avere almeno due successi equivale a:
1-p(nessun successo)-p(1 successo)=

$$1-\binom{10}{0}p^0q^{10}-\binom{10}{1}p^1q^9=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}-10\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9$$

La probabilità richiesta è $p \cong 0.756 \cong 76\ \%$

QUESITO 8

In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? E perché è così spesso citato?

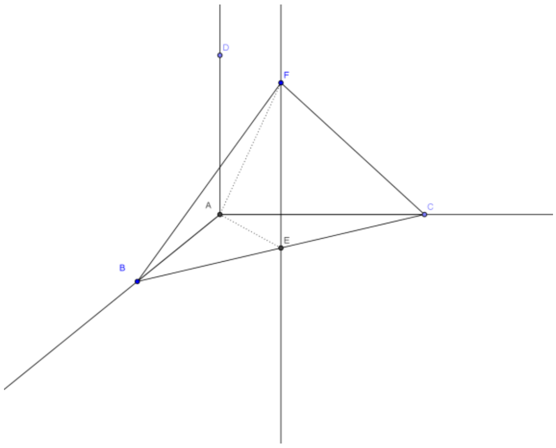
Si tratta di un classico problema di geometria elementare che consiste nell'impossibilità di costruire con riga e compasso un quadrato equivalente ad un cerchio; tale costruzione richiederebbe la costruzione del numero $\sqrt{\pi}$, dimostrata impossibile (usando solo riga e compasso): Lindemann dimostra nel 1882 che π è trascendente, quindi non costruibile con riga e compasso.
L'espressione "*quadratura del cerchio*" è spesso citata per indicare un'impresa impossibile.

QUESITO 9

Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

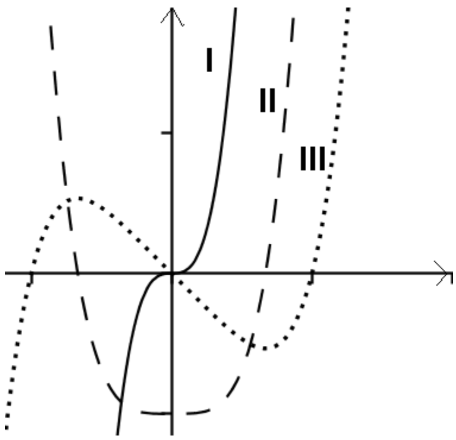
Indichiamo con E il punto medio dell'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC; la mediana AE risulta uguale alla metà dell'ipotenusa. Se la retta FE è perpendicolare in E al piano del triangolo ABC i tre triangoli FEB, FEC ed FEA (tutti rettangoli in E) sono congruenti poiché hanno i due cateti rispettivamente congruenti. Pertanto, per ogni punto F della retta FE, le distanze FA, FB ed FC sono uguali.

Per dimostrare che la retta in questione è il luogo richiesto dobbiamo dimostrare che ogni punto equidistante da A, B e C si trova su tale retta. A tale scopo basta notare che il luogo dei punti equidistanti da A e B è il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio, analogamente per A e C e per B e C: i punti equidistanti da A, B e C appartengono contemporaneamente a questi tre piani, che hanno in comune proprio la retta perpendicolare al piano del triangolo ABC nel punto medio E dell'ipotenusa BC.



QUESITO 10

Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	*I*	*II*	*III*
B)	*I*	*III*	*II*
C)	*II*	*III*	*I*
D)	*III*	*II*	*I*
E)	*III*	*I*	*II*

Si motivi la risposta.

La risposta corretta è la **D (f è la III, f' la II ed f'' la I)**. Infatti:

1) f non può essere la **I**, poiché è sempre crescente, quindi la f' dovrebbe essere positiva o nulla: ciò non si verifica né per la **II** né per la **III**.
2) f non può essere la **II**, perché essendo la concavità sempre verso l'alto, la f'' dovrebbe essere positiva o nulla: ciò non si verifica né per la **I** né per la **III**.
3) f è la **III**: avendo la concavità verso l'alto per x>0 e verso il basso per x<0, la f'' è positiva per x>0 e negativa per x<0: ciò si verifica per la **I**, che è quindi f''; la **III** è decrescente tra l'ascissa del massimo e l'ascissa del minimo, quindi in tale intervallo la f' risulta negativa, come avviene per la **II**.

Con la collaborazione di Angela Santamaria