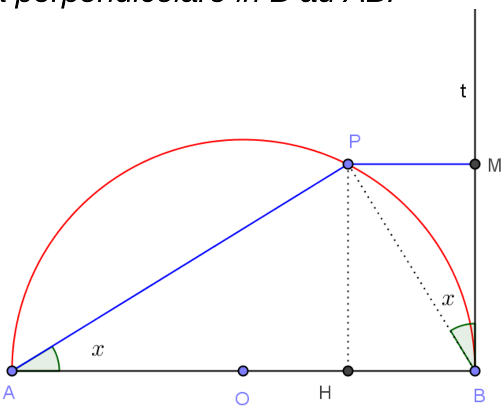
ORDINAMENTO 2011 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2$, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.



1)

Si esprima la somma $AP + PM$ in funzione di $x = B\hat{A}P$.

L'angolo x ha le seguenti limitazioni: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
Notiamo che l'angolo PBM è uguale all'angolo PAB, perché complementari dello stesso angolo PBA.
Si ha:

$AP = AB \cdot cosx = 2\, cosx$, $\quad PB = 2\, senx$, $\quad PM = PB \cdot senx = 2\, sen^2x$

Quindi:

$$y = AP + PM = 2\, cosx + 2\, sen^2x = f(x), \quad con \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

2)

Si studi la funzione $f\,(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

$$y = f(x) = 2\, cosx + 2\, sen^2x$$

Dominio: $0 \leq x \leq 2\pi$

Simmetrie notevoli:

Visto l'intervallo di studio, non si pone il problema di stabilire se la funzione è pari o dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 1$.

Se $y = 0$, $2\,cosx + 2\,sen^2x = 0$, $cosx + 1 - cos^2x = 0$, $cos^2x - cosx - 1 = 0$

da cui:

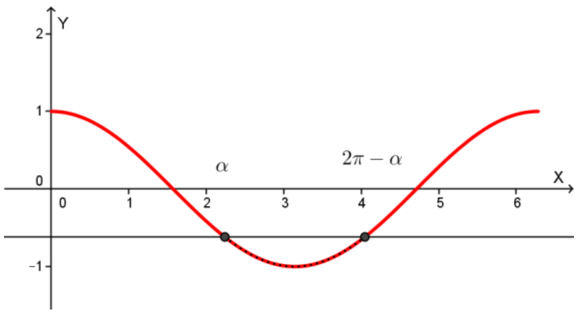
$cosx = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ di cui è accettabile solo $cosx = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0.618$, $x = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$,

quindi $x = \alpha = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cong 2.237 \quad e \quad x = 2\pi - \alpha \cong 4.046$

Segno della funzione:

$y > 0 \;\; se \;\; cosx + 1 - cos^2x > 0 \quad \Longrightarrow \quad cos^2x - cosx - 1 < 0$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < cosx < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

che equivale a $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < cosx \leq 1$: $0 \leq x < \alpha$, $2\pi - \alpha < x \leq 2\pi$



Limiti:

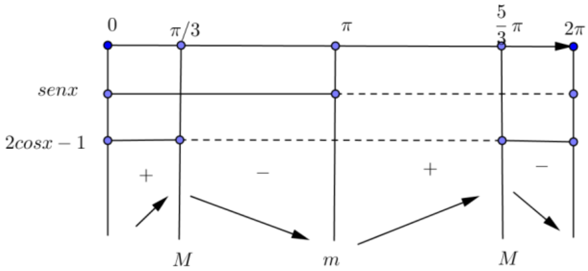
La funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, quindi non serve lo studio dei limiti.

Derivata prima:

$f'(x) = D(2\,cosx + 2\,sen^2x) = -2senx + 4senxcosx = 2senx(2cosx - 1) \geq 0$ *se*

$senx \geq 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$

$2cosx - 1 \geq 0$, $cosx \geq \frac{1}{2}$, $0 \leq x < \frac{\pi}{3} \;\; \vee \;\; \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$



Massimo relativo (e assoluto) per $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{5}{3}\pi$ che vale $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{5}{2}$
Minimo relativo (e assoluto) per $x = \pi$ che vale $f(\pi) = -2$

Derivata seconda:

$f''(x) = D(-2senx + 4senxcosx) = -2cosx + 4\cos^2 x - 4sen^2x \geq 0$ se

$-cosx + 2\cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) \geq 0$, $4\cos^2 x - cosx - 2 \geq 0$

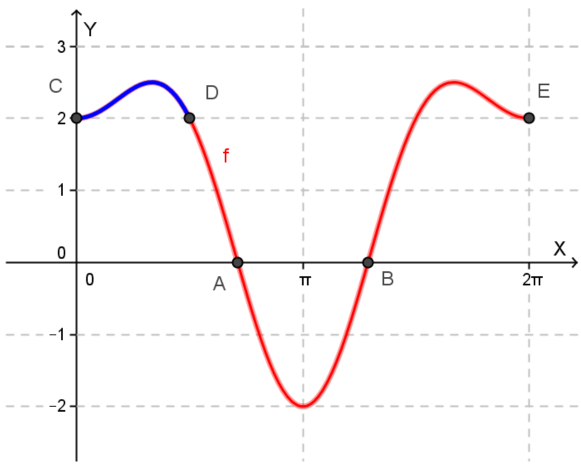
$0. \leq x \leq 0.567829$

$2.20566 \leq x \leq 4.07752$

$5.71536 \leq x \leq 6.28319$

Abbiamo dei flessi per $x \cong 0.57$, $x \cong 2.21$, $x \cong 4.1$, $x \cong 5.72$

Il grafico della funzione è il seguente (è evidenziato da C a D la parte del grafico che tiene conto delle limitazioni del problema):



3)

Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

La simmetria rispetto alla retta $x = \pi$ ha equazioni:

$$\begin{cases} X = 2\pi - x \\ Y = y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\pi - X \\ y = Y \end{cases}$$

La funzione

$$y = f(x) = 2\,cosx + 2\,sen^2x$$

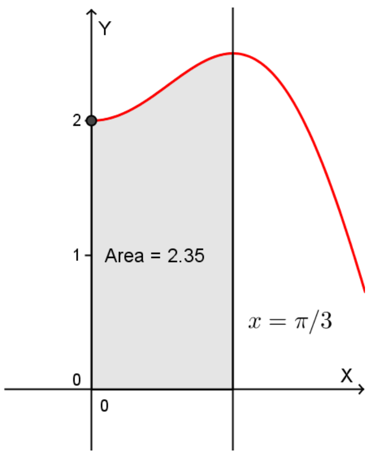
si trasforma in:

$$Y = 2\cos(2\pi - X) + 2sen^2(2\pi - x) = 2cosX + 2sen^2X$$

quindi la curva è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

4)

Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \frac{\pi}{3}$.



$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\,cosx + 2\,sen^2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\,cosx + 1 - cos2x)dx = \left[2senx + x - \frac{1}{2}sen2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left[2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)\,u^2 \cong 2.35\,u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri