ORDINAMENTO 2011 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1)

Si studi la funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Risulta $f(-x) = -f(x)$ quindi la funzione è dispari; il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 0$; se $y = 0$, $x = 0$

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \quad x > 0$.

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -1$; $y = -1$ asintoto orizzontale sinistro.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x\to \\ +-\infty}} \frac{x}{x} = +1$; $y = +1$ asintoto orizzontale destro.

Derivata prima:

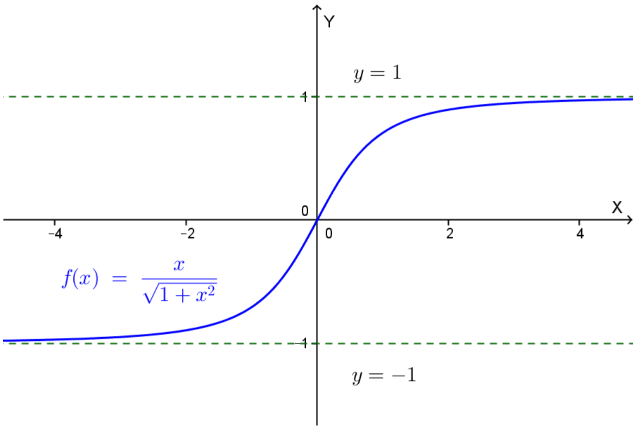
$f'(x) = D\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \forall x$: la funzione è sempre crescente.

Derivata seconda:

$$f''(x) = D(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(2x)) = -\frac{3x}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \quad se \quad x \leq 0$$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto per $x < 0$ e verso il basso se $x > 0$; $x = 0$ è un punto di flesso: $F = (0; 0)$.

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Si scrivano l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di γ avente ascissa $\sqrt{3}$; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse x e dall'asintoto orizzontale destro.

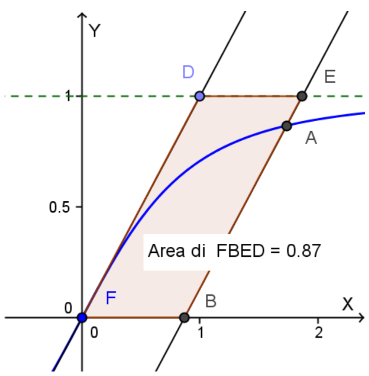
La tangente nel punto di flesso $F = (0; 0)$ ha equazione:

$$y - 0 = f'(0)\cdot(x - 0) \qquad \Longrightarrow \qquad y = x$$

Il punto A di γ di ascissa $\sqrt{3}$ ha coordinate $A = \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La retta per A parallela alla tangente inflessionale ha equazione:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(x - \sqrt{3}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y = x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

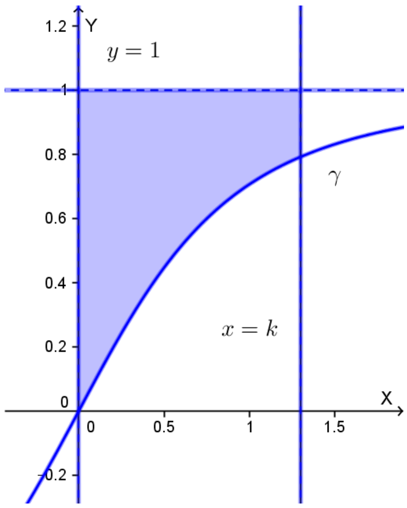


L'ascissa di B è $\frac{\sqrt{3}}{2}$; l'area del parallelogramma è:

$$A(FBED) = x_B\cdot y_D = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\ u^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2 \cong 0.87\ u^2$$

3)

Si calcoli l'area della regione A_k, delimitata dalla curva γ, dall'asse y, dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta $x = k$ con $k > 0$. Si calcoli poi il limite di A_k, quando $k \to +\infty$.



$$Area(A_k) = \int_0^k (1 - f(x))dx = \int_0^k \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \left[x - \sqrt{1+x^2}\right]_0^k = k - \sqrt{1+k^2} + 1$$

Calcoliamo il limite di A_k, quando $k \to +\infty$.

$$\lim_{k\to+\infty} \left(k + 1 - \sqrt{1+k^2}\right) = [\boldsymbol{F.I.}\ + \infty - \infty]$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left(k + 1 - \sqrt{1+k^2}\right) = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2 - (1+k^2)}{k+1+\sqrt{1+k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2k}{k+1+\sqrt{1+k^2}} =$$

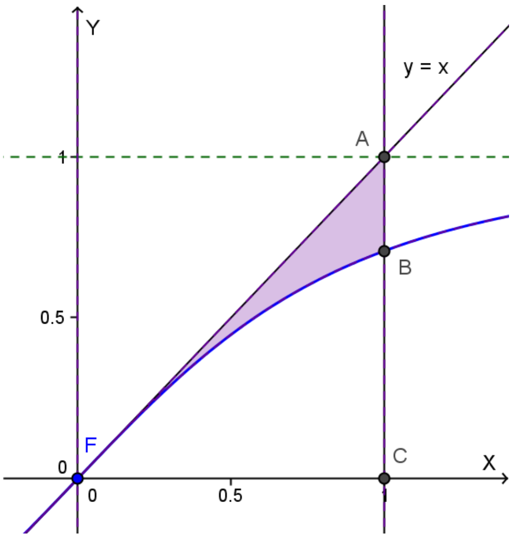
$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{2k}{2k} = 1 = \lim_{k\to+\infty} A_k$$

Come dire che:

$$\int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = 1$$

4)

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x = 1$.



Il volume del solido si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^2}{1+x^2} \right] dx = \pi \int_0^1 \left[\frac{x^4}{1+x^2} \right] dx =$$

$$= \pi \int_0^1 \left[\frac{x^4+1-1}{1+x^2} \right] dx = \pi \int_0^1 \left[\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2} \right] dx = \pi \int_0^1 \left[x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x + arctgx \right]_0^1 = \pi \cdot \left[\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} - (0) \right] = \pi \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) \quad u^3 \cong 0.37 \ \ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri