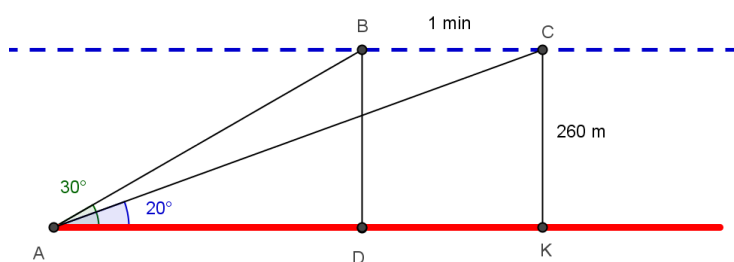


ORDINAMENTO 2011 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30° . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20° , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?



Risulta: $AB = \frac{BD}{\sin 30^\circ} = 2BD = 520 \text{ m}$, $AC = \frac{CK}{\sin 20^\circ} = \frac{260}{0.3420} \text{ m} = 760.23 \text{ m}$

Per il teorema del coseno si ha:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(10^\circ) = (520^2 + 760.23^2 - 1040 \cdot 760.23 \cdot 0.98) \text{ m}^2 \cong$$

$$\cong 73523.24 \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{73523.24 \text{ m}^2} \cong 271.15 \text{ m}$$

Quindi la velocità media degli uccelli è data da:

$$v(\text{uccelli}) = \frac{BC}{1 \text{ min}} = \frac{271.15 \text{ m}}{60 \text{ s}} \cong 4.52 \text{ m/s}$$

QUESITO 2

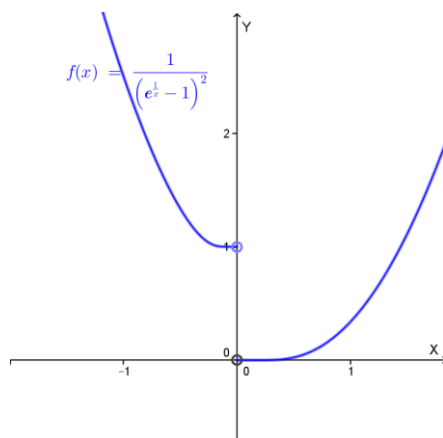
La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2}$$

non è definita nel punto $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

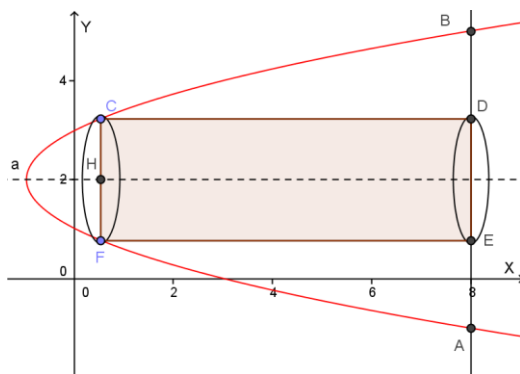
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)^2} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)^2} = 0^+ : \text{ discontinuità di prima specie con salto } 1.$$

Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 3

La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.



Indichiamo con C il generico punto della parabola di ordinata $y \geq 2$ ed ascissa $x \leq 8$.

$C = (x; y)$, con $x_V \leq x \leq 8$, dove $x_V = -1$ è l'ascissa del vertice della parabola, risulta:

$$CH = y_C - y_H = y - 2, \quad CD = 8 - x_C = 8 - x = 8 - (y^2 - 4y + 3) = 5 - y^2 + 4y$$

Il cilindro richiesto ha volume:

$$V(\text{cilindro}) = \pi R^2 h = \pi \cdot CH^2 \cdot CD = \pi(y - 2)^2(5 - y^2 + 4y)$$

Il volume è massimo quando lo è: $z = (y - 2)^2(5 - y^2 + 4y)$ con $2 \leq y \leq 5$

Essendo z una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato essa ammette massimo e minimo assoluto (per il teorema di Weierstrass), che sono da ricercarsi tra i valori agli estremi dell'intervallo ed i valori nei punti che annullano la derivata prima.

$$f(2) = f(5) = 0$$

$$z' = 2(y - 2)(5 - y^2 + 4y) + (y - 2)^2(-2y + 4) = 0 \quad \text{se:}$$

$$y = 0, \quad y = \frac{4-3\sqrt{2}}{2} \cong -0.121 : \text{non accettabile}, \quad y = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} \cong 4.121 : \text{accettabile}$$

Il massimo del volume si ha per $y = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}$ e vale: $V(\max) = 63.617 u^3$

QUESITO 4

Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3 \cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}$$

Che cosa succederebbe se l'esponente fosse $\sin x$?

La funzione (che ha periodo $T = 2\pi$) è definita se:

$$3 \cos x + \sin^2 x - 3 > 0 \quad \cup \quad \begin{cases} 3 \cos x + \sin^2 x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$3 \cos x + \sin^2 x - 3 > 0, \quad 3 \cos x + 1 - \cos^2 x - 3 > 0, \quad \cos^2 x - 3 \cos x + 2 < 0,$$

$$(1 < \cos x < 2) \Rightarrow \nexists x$$

$$\begin{cases} 3 \cos x + \sin^2 x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x > 0 \end{cases}, \quad x = 2k\pi$$

Quindi il campo di esistenza della funzione è: $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Notiamo che la funzione equivale a:

$$f(x) = 0 \quad \text{per } x = 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Se l'esponente fosse $\sin x$, la funzione non sarebbe mai definita. Infatti:

$$\begin{cases} 3 \cos x + \sin^2 x - 3 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x > 0 \end{cases}, \quad \nexists x$$

QUESITO 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{\int_0^1 e^x(x^2 + x + 1) dx}{1-0} = \int_0^1 e^x(x^2 + x + 1) dx$$

Cerchiamo una primitiva di $e^x(x^2 + x + 1)$ integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int e^x(x^2 + x + 1) dx &= \int (e^x)'(x^2 + x + 1) dx = e^x(x^2 + x + 1) - \int e^x(2x + 1) dx = \\ &= e^x(x^2 + x + 1) - 2 \int e^x x dx - \int e^x dx = e^x(x^2 + x + 1) - 2 \int (e^x)' x dx - e^x = \\ &= e^x(x^2 + x + 1) - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right] - e^x = e^x(x^2 + x + 1) - 2x e^x + 2e^x - e^x + k = \\ &= e^x(x^2 - x + 2) + k \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \int_0^1 e^x(x^2 + x + 1) dx = [e^x(x^2 - x + 2)]_0^1 = 2e - 2 = 2(e - 1) \cong 3.44$$

QUESITO 6

Si dica se l'equazione $2\operatorname{sen}x + 2\operatorname{cos}x = 3 + 2^x$ ha soluzioni.

Poiché $2\operatorname{sen}x + 2\operatorname{cos}x = \sqrt{4+4} \cdot \operatorname{sen}(x + \alpha)$ con $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, risulta:

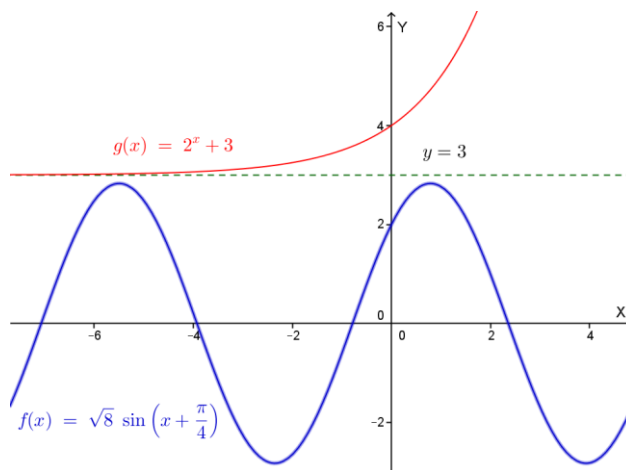
$$\sqrt{8} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 + 2^x$$

Notiamo che $\sqrt{8} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{8} < 3$ mentre $3 + 2^x > 3$: l'equazione non ammette quindi soluzioni.

A conferma di ciò, rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le funzioni di equazioni:

$$f(x) = \sqrt{8} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad e \quad g(x) = 3 + 2^x$$

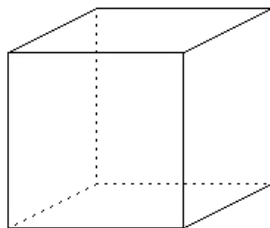
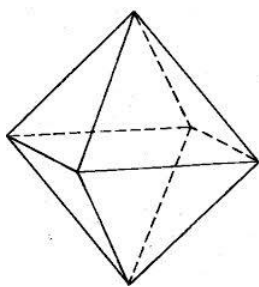
La prima si ottiene dal grafico del seno con una traslazione verso sinistra di $\frac{\pi}{4}$ ed una dilatazione verticale di fattore $\sqrt{8}$, la seconda si ottiene dalla funzione esponenziale $y = 2^x$ con una traslazione verso l'alto di 3.



Come si vede i due grafici non hanno punti di intersezione.

QUESITO 7

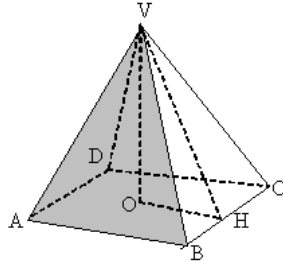
Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.



Ricordiamo che il volume dell'ottaedro regolare di spigolo l è:

$$V(\text{ottaedro regolare}) = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Questa formula si ottiene raddoppiando il volume della piramide regolare retta a base quadrata con spigoli tutti uguali ad l ; infatti:



$$V(\text{tetraedro}) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot VO$$

$$\text{Ma } VO = \sqrt{VH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(l \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}l^2} = l \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{quindi:}$$

$$V(\text{tetraedro}) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot l \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6} l^3 \sqrt{2} \quad \text{pertanto:}$$

$$V(\text{ottaedro regolare}) = 2 \cdot \frac{1}{6} l^3 \sqrt{2} = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Il volume del cubo di spigolo L è:

$$V(\text{cubo}) = L^3$$

I due solidi hanno lo stesso volume se:

$$\frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = L^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{l^3}{L^3} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{L} = \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[6]{\frac{9}{2}}$$

QUESITO 8

Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata $f'(x)$ è simmetrico rispetto all'origine".

La proposizione è vera per ogni funzione.

Per ipotesi la funzione è pari, quindi: $f(-x) = f(x)$. Dobbiamo dimostrare che la derivata prima della funzione è dispari, cioè che:

$$f'(-x) = -f'(x)$$

Infatti:

$$f'(x) = D[f(x)] = D[f(-x)] = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(-x) = -f'(x) \quad \text{c.v.d.}$$

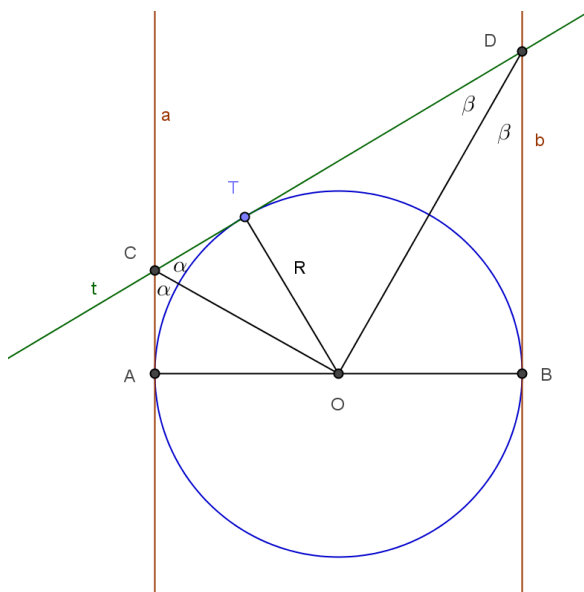
QUESITO 9

Si calcoli il limite della funzione $\frac{e^{x^3}-1}{x \operatorname{sen}^2 x}$ quando x tende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}-1}{x \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 \cdot 1 = 1$$

QUESITO 10

Data una circonferenza di centro O , si conducano negli estremi A e B di un suo diametro AB le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza. Si dimostri che l'angolo $\widehat{C}OD$ è retto.



Risulta: $\widehat{OCA} = \widehat{CTA} = \alpha$ e $\widehat{OTD} = \widehat{ODB} = \beta$ Ma: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (angoli coniugati interni formati dalle parallele a e b con la trasversale t), quindi:

$\alpha + \beta = 90^\circ$ pertanto l'angolo \widehat{COD} è retto.