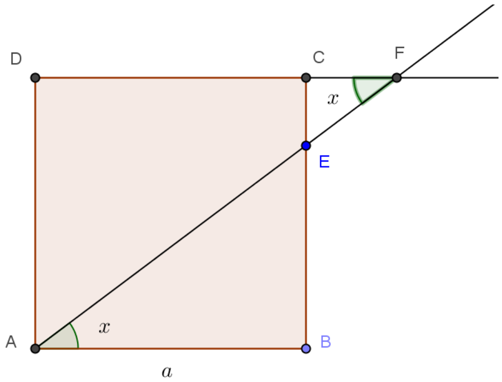
PNI 2011 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

E' dato un quadrato ABCD di lato $AB = a$. Da A si conduca una semiretta, che incontra il lato BC in E ed il prolungamento del lato DC in F.



1)

Si calcoli il rapporto $\frac{BE+DF}{AB}$ espresso in funzione di $x = B\hat{A}E$, controllando che risulta:

$$f(x) = tgx + cotgx \ .$$

L'angolo x ha le seguenti limitazioni: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

Notiamo che l'angolo CFE è uguale all'angolo BAE, perché alterni interni nelle parallele DC e AB con la trasversale AF.

Si ha:

$BE = AB \cdot tgx = a \cdot tgx\,,\qquad CE = BC - BE = a - a \cdot tgx\,,$

$CF = CE \cdot cotgx = (a - a \cdot tgx) \cdot cotgx = a \cdot (1 - tgx) \cdot cotgx = a \cdot (cotgx - 1)$

$DF = DC + CF = a + a \cdot (cotgx - 1) = a \cdot cotgx$

Quindi:

$$f(x) = \frac{BE + DF}{AB} = \frac{a \cdot tgx + a \cdot cotgx}{a} = tgx + cotgx \qquad c.v.d.$$

2)

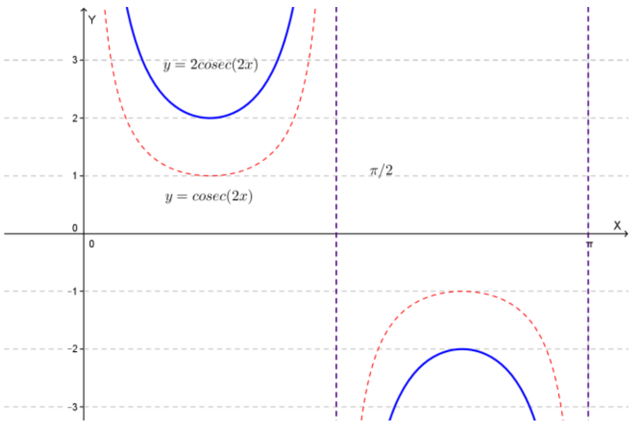
Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le \pi$.

$f(x) = tgx + cotgx$

Osserviamo che la funzione può essere scritta nella forma:

$$f(x) = tgx + cotgx = \frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx} = \frac{1}{senx\ cosx} = \frac{2}{sen2x} = 2\ cosec(2x)$$

Il grafico di questa funzione (di periodo $T = \pi$) si può facilmente ottenere dal grafico della cosecante:



Studio diretto della funzione.

Dominio: $x \ne 0, \frac{\pi}{2}, \pi \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2} < x < \pi$

Simmetrie notevoli:

Visto l'intervallo di studio, non si pone il problema di stabilire se la funzione è pari o dispari.

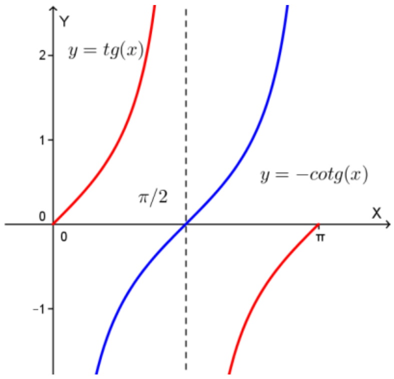
Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, la funzione non esiste

Se $y = 0$, $\ tgx + cotgx = 0\ ,\ tg^2x + 1 = 0 : mai.$

Segno della funzione:

$y > 0 \ \ se\ \ tgx + cotgx > 0 \quad \Longrightarrow \ tgx > -cotgx \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$



Limiti:

$\lim_{x\to o^+} \ (tgx \ + cotgx) = +\infty \qquad x = 0 \quad asintoto \quad verticale$

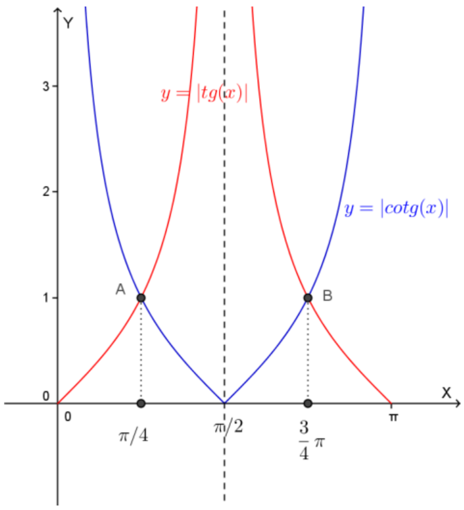
$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\mp}} \ (tgx \ + cotgx) = \pm\infty \qquad x = \frac{\pi}{2} \quad asintoto \quad verticale$

$\lim_{x\to\pi^-} \ (tgx \ + cotgx) = -\infty \qquad x = \pi \quad asintoto \quad verticale$

Derivata prima:

$f'(x) = D(tgx \ + cotgx) = 1 + tg^2x + (-1 - cotg^2x) = tg^2x - cotg^2x \geq 0$ *se*

$$|tgx| \geq |cotgx| \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \ , \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{4}\pi$$



La funzione è quindi crescente per $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{4}\pi$ ed ha pertanto un minimo relativo per $x = \frac{\pi}{4}$ (di ordinata 2) ed un massimo relativo per $x = \frac{3}{4}\pi$ (di ordinata -2)

Derivata seconda:

$f''(x) = D(tg^2x - cotg^2x) = 2tgx(1 + tg^2x) - 2cotgx(-1 - cotg^2x) =$

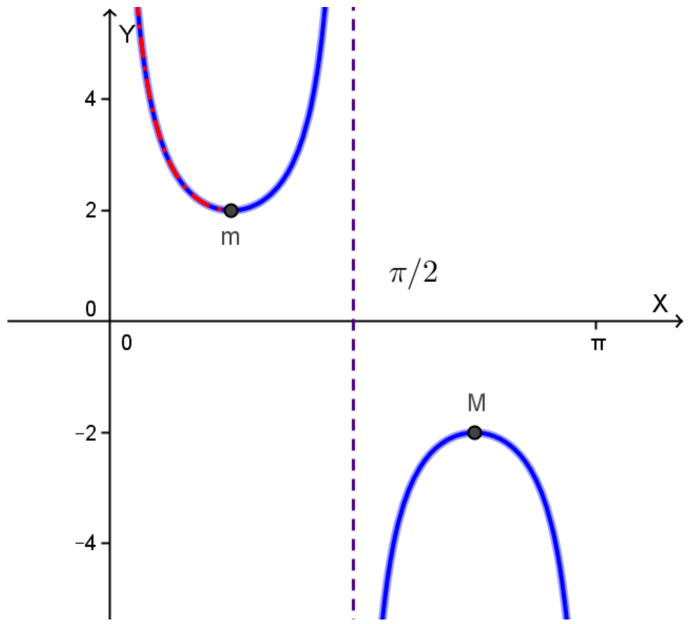
$= 2tgx + 2tg^3x + 2cotgx + 2cotg^3x = 2(tgx + cotgx) + 2(tg^3x + cotg^3x) =$

$= 2(tgx + cotgx) + 2(tgx + cotgx)(tg^2x - tgxcotgx + cotg^2x) \geq 0$ se:

$(tgx + cotgx)(1 + tg^2x - tgxcotgx + cotg^2x) \geq 0$, $(tgx + cotgx)(tg^2x + cotg^2x) \geq 0$

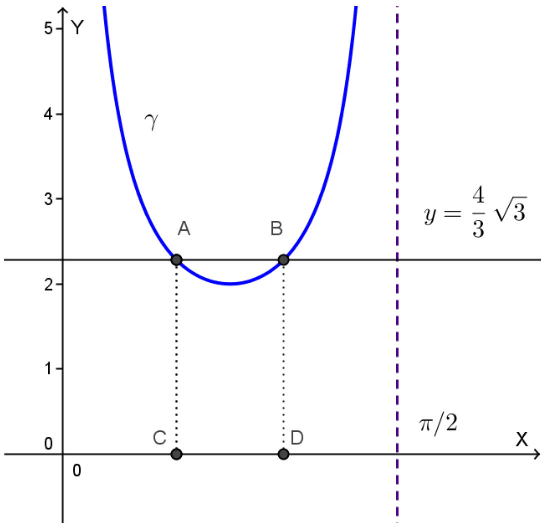
$tgx + cotgx \geq 0$ se $0 < x < \frac{\pi}{2}$: quindi il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e verso il basso se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Nessun flesso.

Il grafico della funzione è il seguente (è evidenziato in tratteggio la parte del grafico che tiene conto delle limitazioni del problema $0 < x < \frac{\pi}{4}$):



3)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dalla retta di equazione $y = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.



Cerchiamo le intersezioni fra la curva e la retta:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ y = tgx + cotgx \end{cases} \implies \frac{2}{sen2x} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \implies sen2x = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi: $sen2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad 2x = \frac{\pi}{3} \quad e \quad 2x = \frac{2}{3}\pi \quad \implies \quad x = \frac{\pi}{6} \quad e \quad x = \frac{\pi}{3}$

$$Area = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{4}{3}\sqrt{3} - (tgx + cotgx)\right] dx =$$

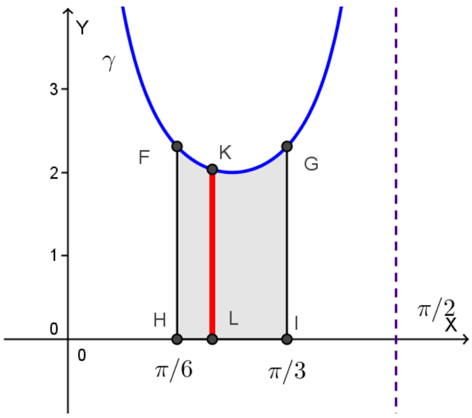
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{senx}{cosx} - \frac{cosx}{senx}\right) dx = \left[\frac{4}{3}\sqrt{3}x + ln(cosx) - ln(senx)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\sqrt{3}x - \ln(tgx)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left[\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \quad ln(\sqrt{3})\right] u^2 = \left(\frac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi - \quad ln(\sqrt{3})\right) u^2 =$$

$$\cong 0.11 \; u^2 = Area$$

4)

La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nell'intervallo $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi/3$ è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



Il volume del solido S si ottiene calcolando il seguente integrale: $\int_a^b A(x)dx$, dove $A(x)$ è l'area della sezione, nel nostro caso un triangolo equilatero di lato $KL = f(x)$; risulta:

$$A(x) = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = f^2(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2}{sen2x}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{sen^2 2x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{sen^2 2x}$$

$$\int A(x)\,dx = \int \frac{\sqrt{3}}{sen^2 2x}\,dx = \frac{-\sqrt{3}}{2}\int \frac{-2}{sen^2 2x}\,dx = \frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot cotg(2x) + k$$

$$V(S) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} A(x)dx = \left[\frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot cotg(2x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(cotg\left(\frac{2}{3}\pi\right) - cotg\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1\ u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri