PNI 2011 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = (3-x)\sqrt{x+3}$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$\boldsymbol{f(x) = (3-x)\sqrt{x+3}}$

Dominio: $x \geq -3 \quad \Longrightarrow \quad -3 \leq x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Visto il dominio, la funzione non può essere pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = \sqrt{3}$; se $y = 0$, $x = 3 \quad e \quad x = -3$

Segno della funzione:

$y \geq 0 \quad se \quad x \leq 3$.

Limiti:

$\lim_{x\to+\infty} (3-x)\sqrt{x+3} = -\infty$; non c'è asintoto obliquo perché la funzione non è un infinito del primo ordine per x che tende a più infinito.

Derivata prima:

$$f'(x) = D\left((3-x)\sqrt{x+3}\right) = -\sqrt{x+3} + (3-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-2x-6+3-x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-3x-3}{2\sqrt{x+3}}$$

$f'(x) \geq 0 \quad se \quad -3x-3 \geq 0, \quad x \leq -1$:

la funzione cresce per $-3 \leq x < -1$ e decresce per $-1 < x < +\infty$.

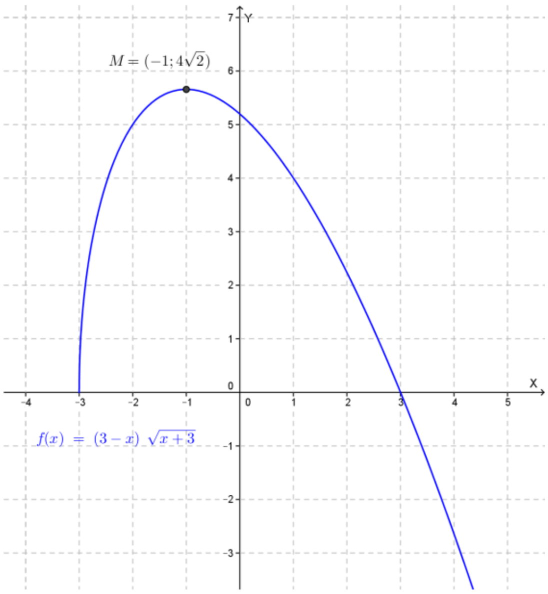
$x = -1$ punto di massimo relativo (e assoluto) con valore $f(-1) = 4\sqrt{2}$.

Derivata seconda:

$$f''(x) = D\left(\frac{-3x-3}{2\sqrt{x+3}}\right) = \frac{-3x-15}{4\sqrt{(x+3)^3}} \geq 0 \quad se \quad x \leq -5\ , \qquad cioè\ mai\ nel\ dominio$$

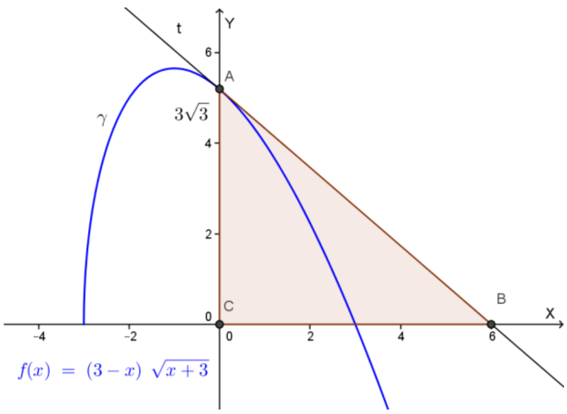
Quindi il grafico volge la sempre la concavità verso il basso. Non ci sono flessi.

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Si scriva l'equazione della tangente t alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.



Il punto di intersezione con l'asse delle y è $A = \left(0; 3\sqrt{3}\right)$. La tangente in A è:

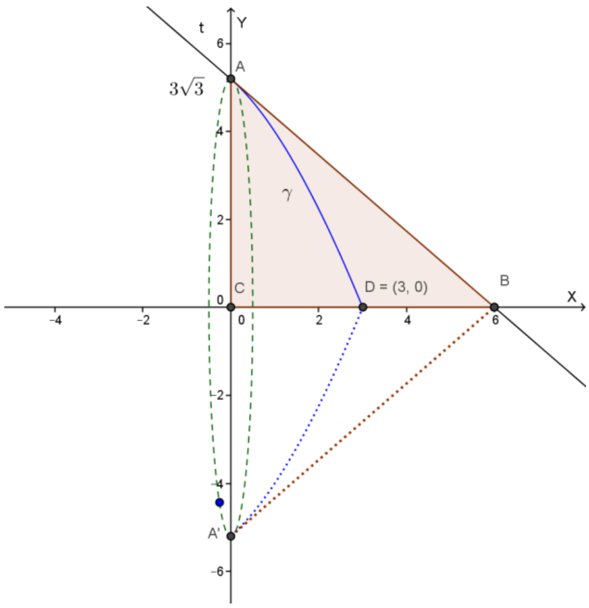
$$y - 3\sqrt{3} = f'(0)\cdot(x-0) \qquad \Longrightarrow \qquad y - 3\sqrt{3} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot x \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + 3\sqrt{3}$$

Il triangolo ABC che la tangente in A al grafico della funzione forma con gli assi cartesiani ha area:

$$A(ABC) = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 6}{2}\ u^2 = 9\sqrt{3}\ u^2 \cong 15.59\ u^2$$

3)

Si calcoli il volume del cono S generato da una rotazione attorno all'asse x del succitato triangolo e il volume del solido S' generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva γ e dagli assi cartesiani.



Il volume del cono S è dato da:

$$V(cono\ S) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(3\sqrt{3}\right)^2 \cdot 6 = 54\,\pi\ \ u^3$$

Il volume del solido S' si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V(S') = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^3 \left[(3-x)\sqrt{x+3}\right]^2 dx = \pi \int_0^3 (3-x)^2(x+3)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^3 (x^3 - 3x^2 - 9x + 27)\,dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 27x\right]_0^3 = \frac{135}{4}\pi\ \ u^3$$

4)

Si scelga a caso un punto all’interno del cono S. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al solido S’.

$$p = \frac{V(cono\ S) - V(S')}{V(cono\ S)} = 1 - \frac{V(S')}{V(cono\ S)} = 1 - \frac{\frac{135}{4}\pi}{54\,\pi} = 1 - \frac{135}{4 \cdot 54} = 1 - \frac{5}{8} =$$

$$= \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\% = p$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri