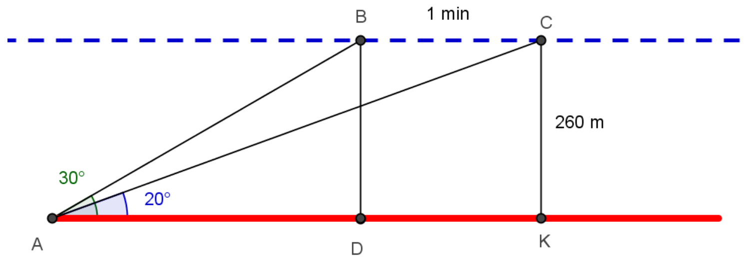
PNI 2011 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?



Risulta: $AB = \frac{BD}{sen\ 30^0} = 2BD = 520\ m\ ,\quad AC = \frac{CK}{sen\ 20°} = \frac{260}{0.3420}\ m = 760.23\ m$

Per il teorema del coseno si ha:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(10°) = (520^2 + 760.23^2 - 1040 \cdot 760.23 \cdot 0.98)\ m^2 \cong$$

$$\cong 73523.24\ m^2 \quad \Longrightarrow \quad BC = \sqrt{73523.24\ m^2} \cong 271.15\ m$$

Quindi la velocità media degli uccelli è data da:

$$v(uccelli) = \frac{BC}{1\ min} = \frac{271.15\ m}{60\ s} \cong 4.52\ \ m/s$$

QUESITO 2

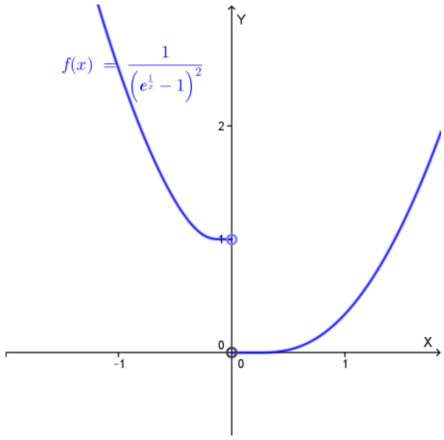
La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2}$$

non è definita nel punto x = 0, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della f(x) per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

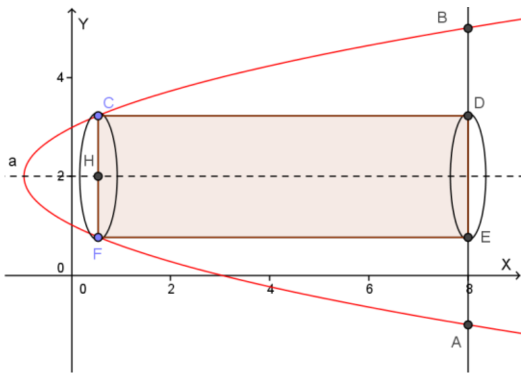
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2} = 0^+$: discontinuità di prima specie con salto 1.

Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 3

La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.



Indichiamo con C il generico punto della parabola di ordinata $y \geq 2$ ed ascissa $x \leq 8$.

$C = (x; y)$, con $x_V \leq x \leq 8$, dove $x_V = -1$ è l'ascissa del vertice della parabola, risulta:

$CH = y_c - y_H = y - 2$, $\quad CD = 8 - x_C = 8 - x = 8 - (y^2 - 4y + 3) = 5 - y^2 + 4y$

Il cilindro richiesto ha volume:

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot CH^2 \cdot CD = \pi(y-2)^2(5 - y^2 + 4y)$$

Il volume è massimo quando lo è: $z = (y-2)^2(5 - y^2 + 4y) \quad con \quad 2 \leq y \leq 5$

Essendo z una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato essa ammette massimo e minimo assoluto (per il teorema di Weierstrass), che sono da ricercarsi tra i valori agli estremi dell'intervallo ed i valori nei punti che annullano la derivata prima.

$f(2) = f(5) = 0$

$z' = 2(y-2)(5-y^2+4y) + (y-2)^2(-2y+4) = 0 \quad se:$

$y = 0\,, \quad y = \frac{4-3\sqrt{2}}{2} \cong -0.121 : non\ accettabile\,, \quad y = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} \cong 4.121 : accettabile$

Il massimo del volume si ha per $y = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}$ e vale: $V(max) = 63.617\ u^3$

QUESITO 4

Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f\,(x) = \left(3\cos x + sen^2 x - 3\right)^{\cos x}$$

Che cosa succederebbe se l'esponente fosse $senx$ *?*

La funzione (che ha periodo $T = 2\pi$) è definita se:

$$3\cos x + sen^2 x - 3 > 0 \quad \cup \quad \begin{cases} 3\cos x + sen^2 x - 3 = 0 \\ cosx > 0 \end{cases}$$

$3\cos x + sen^2 x - 3 > 0\,, \quad 3\,cosx + 1 - \cos^2 x - 3 > 0\,, \ \cos^2 x - 3\,cosx + 2 < 0\,,$

$(1 < cosx < 2 \quad) \quad \Longrightarrow \ \nexists\, \boldsymbol{x}$

$\begin{cases} 3\cos x + sen^2 x - 3 = 0 \\ cosx > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - 3\,cosx + 2 = 0 \\ cosx > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ cosx > 0 \end{cases}, \quad \boldsymbol{x = 2k\pi}$

Quindi il campo di esistenza della funzione è: $\boldsymbol{x = 2k\pi, \quad con\ \ k \in \mathbb{Z}.}$

Notiamo che la funzione equivale a:

$$\boldsymbol{f(x) = 0 \quad per\ \ x = 2k\pi, \quad con\ \ k \in \mathbb{Z}}$$

Se l'esponente fosse $sen\,x$, la funzione non sarebbe mai definita. Infatti:

$\begin{cases} 3\cos x + sen^2 x - 3 = 0 \\ senx > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - 3\,cosx + 2 = 0 \\ senx > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ senx > 0 \end{cases}, \quad \nexists\, \boldsymbol{x}$

QUESITO 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2+x+1)$*, nell'intervallo* $0 \le x \le 1$.

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_0^1 e^x(x^2+x+1)dx}{1-0} = \int_0^1 e^x(x^2+x+1)dx$$

Cerchiamo una primitiva di $e^x(x^2+x+1)$ integrando per parti:

$$\int e^x(x^2+x+1)dx = \int (e^x)'(x^2+x+1)dx = e^x(x^2+x+1) - \int e^x(2x+1)dx =$$

$$= e^x(x^2+x+1) - 2\int e^x x dx - \int e^x dx = e^x(x^2+x+1) - 2\int (e^x)' x\, dx - e^x =$$

$$= e^x(x^2+x+1) - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] - e^x = e^x(x^2+x+1) - 2xe^x + 2e^x - e^x + k =$$

$$= e^x(x^2-x+2) + k$$

Quindi:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \int_0^1 e^x(x^2+x+1)dx = [e^x(x^2-x+2)]_0^1 = 2e-2 = 2(e-1) \cong 3.44$$

QUESITO 6

Si determini un numero positivo N tale che, per x > N, la funzione $f(x) = 2^{0,3x}$ *è sempre maggiore della funzione* $g(x) = x^{30}$.

Dobbiamo trovare un numero positivo N tale che, per ogni x>N, risulti sempre:

$$2^{0,3\,x} > x^{30}$$

Rappresentiamo in modo qualitativo nello stesso sistema di riferimento le due funzioni. Notiamo che, per valori positivi della x, le due curve si incontrano una prima volta nei pressi dell'1; siccome f(x) è un infinito di ordine superiore rispetto a g(x), il grafico della f ad un certo punto dovrà essere al di sopra del grafico della g.

Per x=10: $f(10) = 8$, $g(10) = 10^{10}$: è ancora maggiore la g.

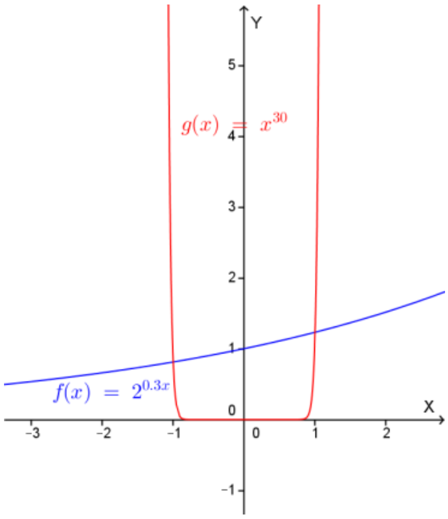
Per x=100: $f(100) = 2^{30} \cong 1.07 \cdot 10^9$, $g(10) = 100^{30}$: è ancora maggiore la g.

Per x=1000: $f(1000) = 2^{300} \cong 2.04 \cdot 10^{90}$, $g(10) = 10^{90}$: è maggiore la f.

Quindi, per x>1000 risulterà sempre

$$2^{0,3\,x} > x^{30}$$

Un valore di N per cui *la funzione* $f(x) = 2^{0,3x}$ *è sempre maggiore della funzione* $g(x) = x^{30}$ è quindi $N = 1000$.



QUESITO 7

Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$$

si calcoli un'approssimazione di $\frac{\pi}{2}$ *, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.*

Posto $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, consideriamo l'intervallo $[0; 1]$ e dividiamolo in n parti; poniamo $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$.

Utilizzando, per esempio, la formula dei trapezi, l'integrale dato può essere approssimato mediante la formula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso, ponendo per esempio n=5, abbiamo $h = \frac{1}{5}$

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{1}{5},\ \ \ x_2 = \frac{2}{5},\ \ x_3 = \frac{3}{5},\ \ \ x_4 = \frac{4}{5},\ \ \ x_5 = 1$$

Quindi si ha la seguente approssimazione:

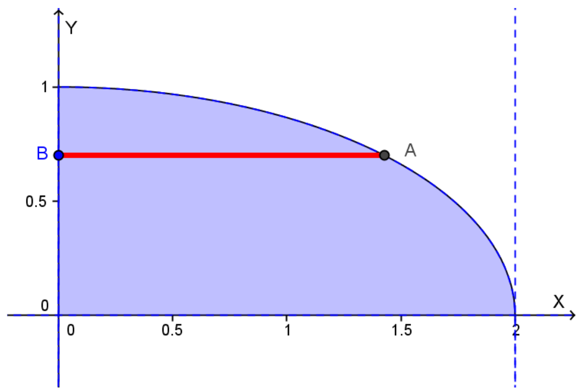
$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \cong \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right] \cong 0.5609$$

Quindi: $\frac{\pi}{2} - 1 \cong 0.5609$ da cui $\frac{\pi}{2} \cong 1.5609$

Notiamo che il valore esatto di $\frac{\pi}{2}$ è: $1.57079\ \ldots\ldots$

QUESITO 8

La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.



Il volume del solido F si ottiene calcolando il seguente integrale:

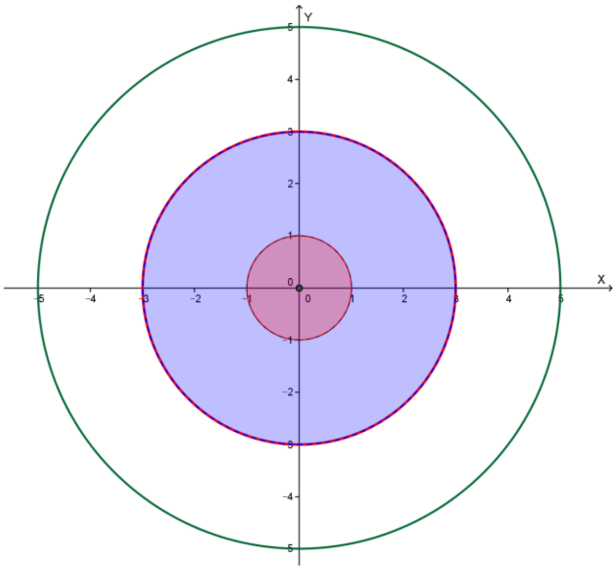
$$V(F) = \int_0^1 A(y)dy$$

dove $A(y)$ è l'area del quadrato di lato $AB = x_A$; quindi $A(y) = x^2 = 4(1-y^2)$.

$$V(F) = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 4(1-y^2)dy = 4 \cdot \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\, u^3 \cong 2.667\, u^3$$

QUESITO 9

Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità ½ di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1 ?

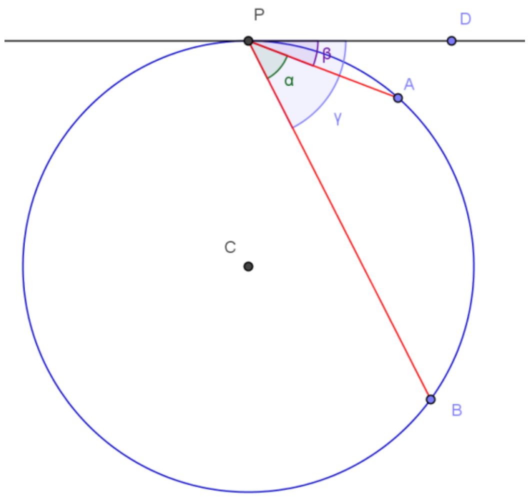


L'area favorevole è data dall'area della corona circolare di raggi 1 e 3, l'area possibile (con probabilità ½) è data dall'area del cerchio di raggio 5. Quindi:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{area\ favorevole}{area\ possibile} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot (3^2 - 1^2)}{\pi \cdot 5^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{25} = \frac{4}{25} = 0.16 = 16\%$$

QUESITO 10

Sia P un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso A e B, l'angolo $A\hat{P}B$ sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.



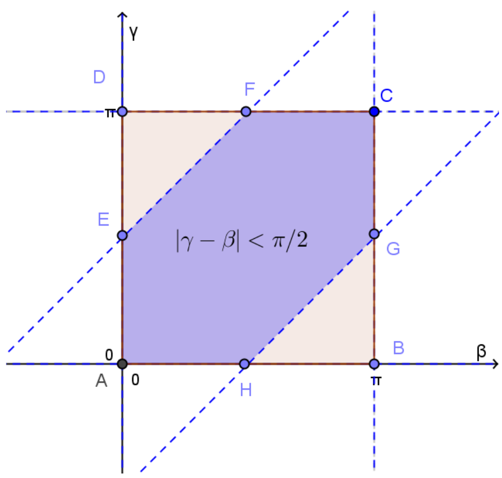
Fissato P, consideriamo la tangente in P alla circonferenza e su di essa un punto D.

Deve essere $\alpha = |\gamma - \beta| < \frac{\pi}{2}$

Gli angoli γ e β sono legati alla scelta di A e B ed hanno le limitazioni:

$$0 \le \gamma \le \pi \qquad 0 \le \beta \le \pi$$

La possibilità di scelta per A e B equivale quindi all'area del quadrato di area π^2; le scelte di A e B favorevoli equivalgono all'area della parte del quadrato di lato π che soddisfa la condizione: $|\gamma - \beta| < \frac{\pi}{2}$



L'area favorevole è data da:

$$A(poligono\ EOHGCF) = A(quadrato) - 2Area(HBG) = \pi^2 - 2 \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \right) = \frac{3}{4}\pi^2$$

La probabilità richiesta è quindi data da:

$$p = \frac{\frac{3}{4}\pi^2}{\pi^2} = \frac{3}{4}$$