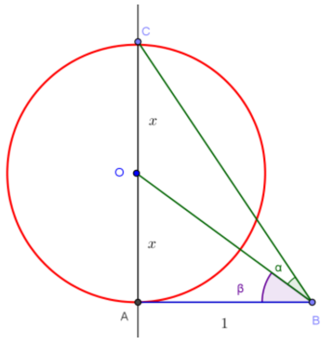
# ORDINAMENTO 2011 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

*Siano dati un segmento AB=1 ed una circonferenza con il centro O sulla perpendicolare in A ad AB e il diametro AC = 2x.*




## a)

*Posto* $y = tan\ O\hat{B}C$, *si esprima y in funzione di x, mostrando che risulta:*

$$y = \frac{x}{1+2x^2}\ ,\quad con\ x \geq 0\ .$$

Notiamo che $0 \leq \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Risulta:

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{2x}{1} = 2x$ , qiuindi $2x \geq 0\ \ da\ cui\ \ x \geq 0$

$\tan(\beta) = \frac{x}{1} = x$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{y+x}{1-yx} = 2x\ ,\quad y+x = 2x-2yx^2\ , y(1+2x^2) = x$

Quindi:

$y = \frac{x}{1+2x^2}\ \ con\ x \geq 0$ c.v.d.

## b)

*Si studi la funzione y = f (x) e se ne tracci il grafico* Γ.

$$f(x) = \frac{x}{1+2x^2}$$

**Dominio:**

Prescindendo dal limite geometrico sulla x, la funzione è definita su tutto R.
Notiamo che risulta $f(-x) = f(x)$, quindi la funzione è dispari.

**Intersezioni con gli assi:**

Se x=0: y=0 ; se y=0: x=0.

**Positività:**

La funzione è positiva o nulla $\frac{x}{1+2x^2} \geq 0$, $x \geq 0$.

**Limiti:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+2x^2} = 0^+ \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+2x^2} = 0^-$$

**Asintoti:**

Asintoto y=0 per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

**Derivata prima:**

$$f'(x) = \frac{2-4x^2}{8x^4+8x^2+2} = \frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2} \geq 0 \quad se \quad 1-2x^2 \geq 0\,, \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pertanto la funzione è crescente se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , decrescente nella parte rimanente.
Abbiamo un minimo relativo (ed assoluto) per $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, con ordinata $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, ed un massimo relativo (ed assoluto) per $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, con ordinata $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

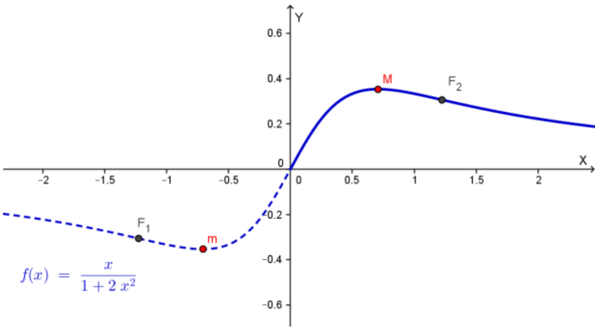
**Derivata seconda:**

$$f''(x) = \frac{8x^3-12x}{(2x^2+1)^3} \geq 0 \quad se \quad 8x^3-12x \geq 0\,, \qquad x(2x^2-3) \geq 0$$

Primo fattore: $x \geq 0$
Secondo fattore $2x^2-3 \geq 0$, $x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad or \quad x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$
La derivata seconda è quindi positiva (grafico con la concavità verso l'alto) se:

$-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \quad e \quad x > \sqrt{\frac{3}{2}}$; abbiamo dei punti di flesso in $x = 0, x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad e \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ con ordinata rispettivamente: $y = 0, y = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad e \quad y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

**Grafico della funzione** (in tratto continuo la parte compatibile con la limitazione sulla x che è $x \geq 0$):




## c)

*Si scrivano le equazioni delle tangenti a* $\Gamma$ *nei punti di flesso e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse x.*

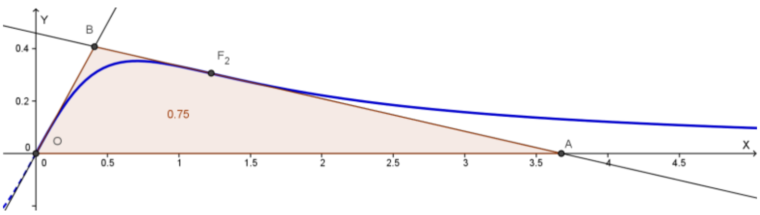
Punti di flesso: $O = (0;0)$, $F_1 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}};\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}};\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Ma con la condizione sulla x dobbiamo considerare i punti di flesso $O\ ed\ F_2$ .

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2};\quad f'(0) = 1, \qquad f'\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{8}$$

Tangente in O: $y = x$

Tangente in $F_2$: $y - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{8}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ , $\quad y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$




Il triangolo richiesto è OAB, essendo B l'intersezione fra le due tangenti ed A l'intersezione fra la tangente in $F_2$ e l'asse x; l'ascissa di A è $3\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Cerchiamo l'intersezione B fra le due tangenti:

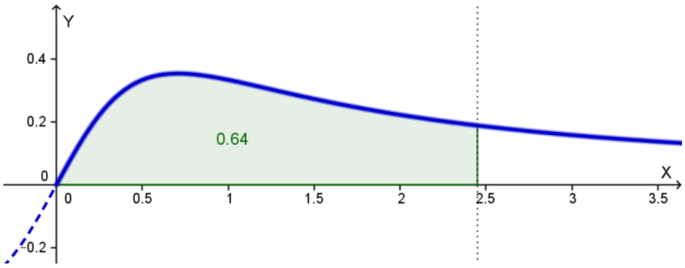
$$\begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases};\quad x = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}};\quad \frac{9}{8}x = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}};\quad x_B = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = y_B$$

L'area del triangolo è data da:

$$Area(OAB) = \frac{x_A \cdot y_B}{2} = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4}\ u^2 = 0.75\ u^2$$

## d)

*Si determini l'area della regione di piano limitata da $\Gamma$ , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \sqrt{6}$.*




L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_0^{\sqrt{6}} \frac{x}{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{6}} \frac{4x}{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\ln(1+2x^2)\right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{1}{4}\left[\ln(13) - 0\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\ln(13)\ u^2 = 0.64\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria