ORDINAMENTO 2011 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione: $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$ *.*

a)

Si studi tale funzione e se ne disegni il grafico Λ *su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.*

$f(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$

Dominio:

La funzione è definita su tutto R.
La funzione non è pari né dispari: f(-x) è diversa da f(x) e da -f(-x).

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=3 ; se y=0: $x^2 - 4x + 3 = 0,\ \ x = 1\ \ e\ \ x = 3$.

Positività:

$f(x) \geq 0\ \ se\ \ x^2 - 4x + 3 \geq 0:\ \ \ x \leq 1\ \ or\ \ x \geq 3\ .$

Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2 - 4x + 3) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2) = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2 - 4x + 3) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x^2) = +\infty$$

Asintoti:

Asintoto y=0 per $x \to -\infty$; non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

Derivata prima:

$f'(x) = e^x(x^2 - 2x - 1) \geq 0\ \ se\ \ x^2 - 2x - 1 \geq 0:\ \ x \leq 1 - \sqrt{2}\ \ or\ \ x \geq 1 + \sqrt{2}$

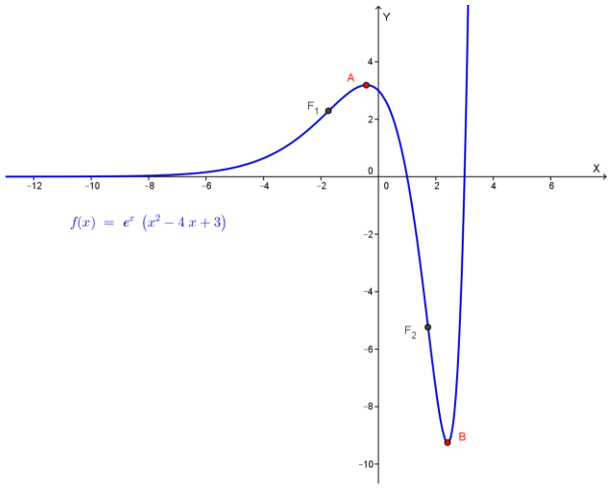
Pertanto la funzione è crescente se $x < 1-\sqrt{2}$ or $x > 1+\sqrt{2}$, decrescente nella parte rimanente.
Abbiamo un minimo relativo (ed assoluto) per $x = 1+\sqrt{2}$, con ordinata $f(1+\sqrt{2}) \cong -9.3$, ed un massimo relativo per $x = 1-\sqrt{2}$, con ordinata $f(1-\sqrt{2}) \cong 3.2$

Derivata seconda:

$f''(x) = e^x(x^2-3) \geq 0 \quad se \quad x^2-3 \geq 0: \quad x \leq -\sqrt{3} \quad or \quad x \geq \sqrt{3}$.

Il grafico volge la concavità verso l'alto se $x < -\sqrt{3}$ or $x > \sqrt{3}$; abbiamo dei punti di flesso in $x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$ con ordinata rispettivamente: $f(-\sqrt{3}) \cong 2.3,\ f(\sqrt{3}) \cong -5.3$

Grafico della funzione:



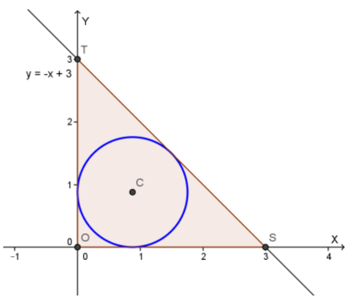
b)

Si scriva l'equazione della tangente alla curva Λ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli il raggio del cerchio inscritto nel triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.

Il punto di intersezione con l'asse y ha coordinate T=(0; 3). La tangente in T è:

$y-3 = f'(0)(x-0)\,,\quad y-3 = -x\,,\qquad y = -x+3$

Il triangolo formato da questa retta con gli assi cartesiani è indicato nella figura seguente:



Ricordiamo la seguente relazione (r indica il raggio della circonferenza inscritta, p il semiperimetro del triangolo):

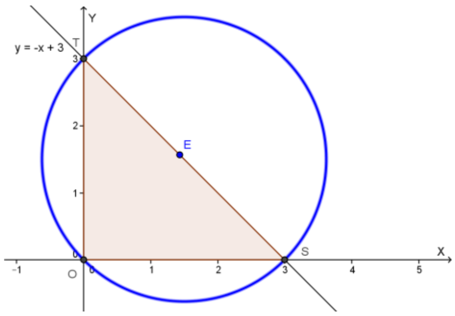
$$Area(OST) = p \cdot r\ ,\quad r = \frac{Area(OST)}{p}$$

Ma risulta: OS=OT=3, $ST = 3\sqrt{2},\ p = \frac{6+3\sqrt{2}}{2}$, $Area(OST) = \frac{9}{2}$, quindi:

$$r=\frac{Area(OST)}{p}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{6+3\sqrt{2}}{2}}=\frac{9}{6+3\sqrt{2}}=\frac{9(6-3\sqrt{2})}{18}=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\cong 0.878=r$$

c)

Si scriva l'equazione della circonferenza circoscritta al suddetto triangolo.

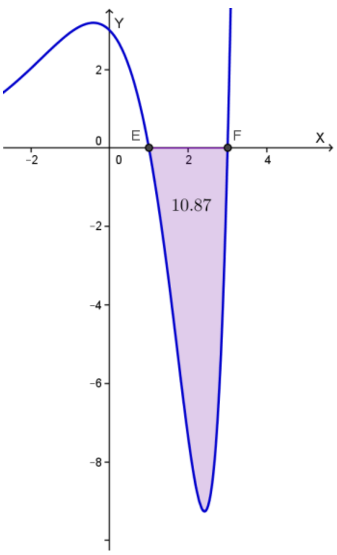


Siccome il triangolo OST è rettangolo in O, la circonferenza ha centro nel punto medio E dell'ipotenusa ST, e raggio pari alla metà di ST. Quindi:

$$E=centro=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)\ ,\ r=\frac{3}{2}\sqrt{2}\ :\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\ ,\ x^2+y^2-3x-3y=0$$

d)

Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel IV quadrante, delimitata dalla curva Λ e dall'asse x.



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area=-\int_1^3 e^x(x^2-4x+3)dx$$

Cerchiamo una primitiva di $e^x(x^2-4x+3)$ integrando per parti:

$$\int e^x(x^2-4x+3)dx=\int (e^x)'\cdot(x^2-4x+3)dx=$$
$$=e^x(x^2-4x+3)-\int e^x(2x-4)\,dx=$$
$$=e^x(x^2-4x+3)-\int (e^x)'(2x-4)\,dx=$$

$$= e^x(x^2 - 4x + 3) - \left[e^x(2x - 4) - \int e^x \cdot 2\, dx\right] =$$

$$= e^x(x^2 - 4x + 3) - [e^x(2x - 4) - 2e^x] = e^x(x^2 - 6x + 9) + c$$

Quindi:

$$Area = -\int_1^3 e^x(x^2 - 4x + 3)dx = -[e^x(x - 3)^2]_1^3 = -[-4e] = (4e)\ u^2 \cong 10.87\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria